

范钦珊 李 晨 李栋栋 孙 伟 (特邀)

# 材料力学

Mechanics of Materials



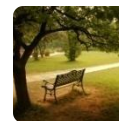
2019-5-5



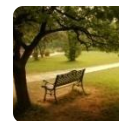
# 自主学习 + 深度研讨



# 单元9-1 稳定性问题的适度扩展— 初始后屈曲理论及其应用简介

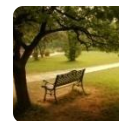


# ■ 历史上弹性稳定研究中两大谜团

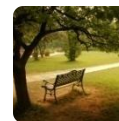


**上世纪40—60年代，全世界关于弹性稳定性研究有两大谜团一直困惑着人们：**

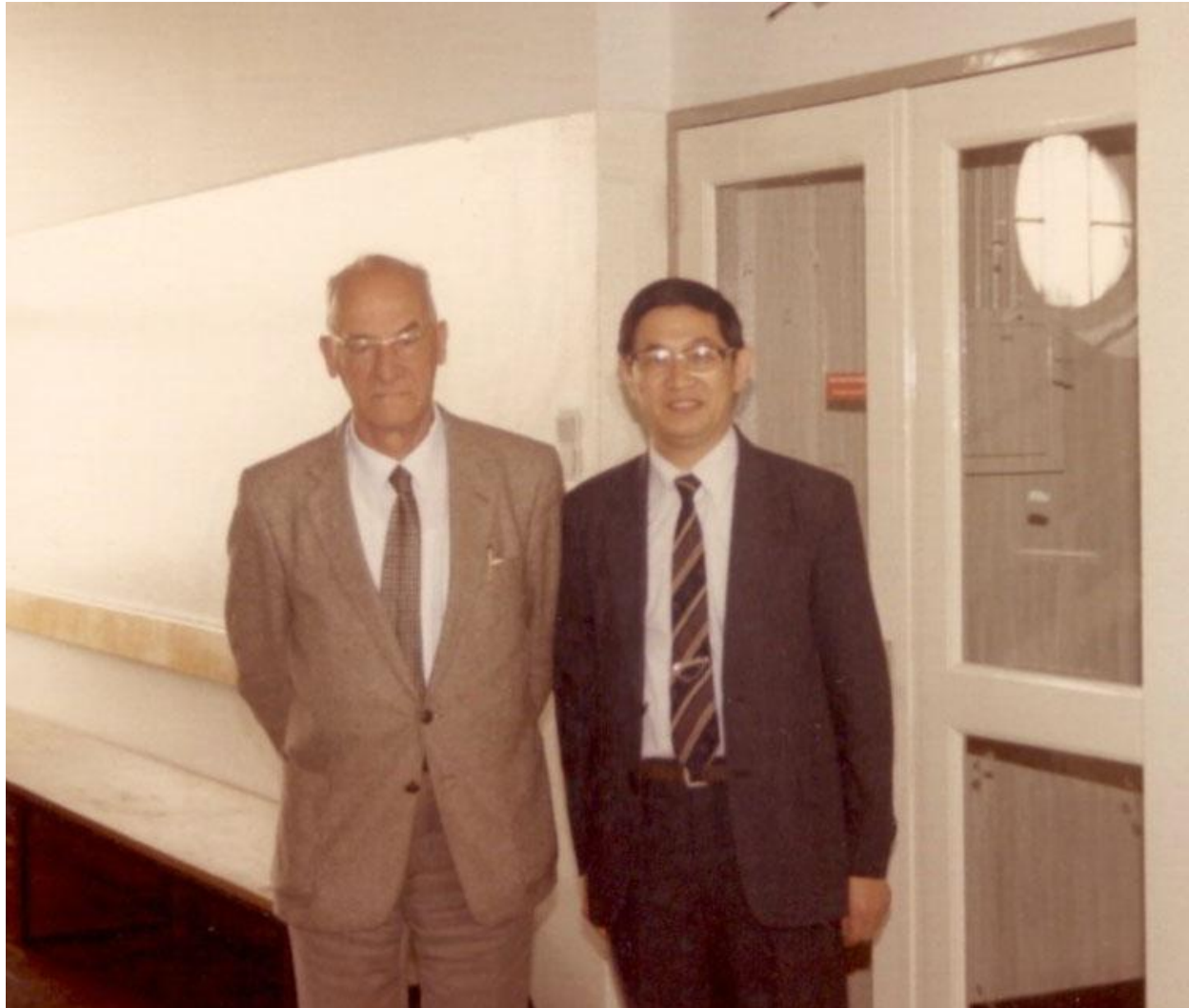
- **理论结果与实验结果极不吻合。**
- **同一问题的实验结果高度分散。**



**结构的后屈曲理论起始于30年代，但在40年代初，当Th.von.Karman和钱学森论证了某些类型的壳体结构屈曲荷载的理论与实验结果极不吻合，其原因在于这些结构的后屈曲状态极不稳定，才形成了与过去完全不同的后屈曲性态的研究。这就是弹性稳定的大挠度理论。**



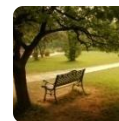
大约在同一时期，在战时的荷兰，**W.T.Koiter**建立了承受保守载荷弹性系统稳定性的一般理论，即初始后屈曲理论。1943年Koiter完成了他的博士论文。但直到1945年荷兰从德国占领下解放之后，Koiter才以荷兰文发表了他的这篇论文。由于语言关系，当时很少有人了解Koiter的伟大成果。



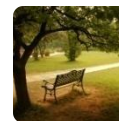




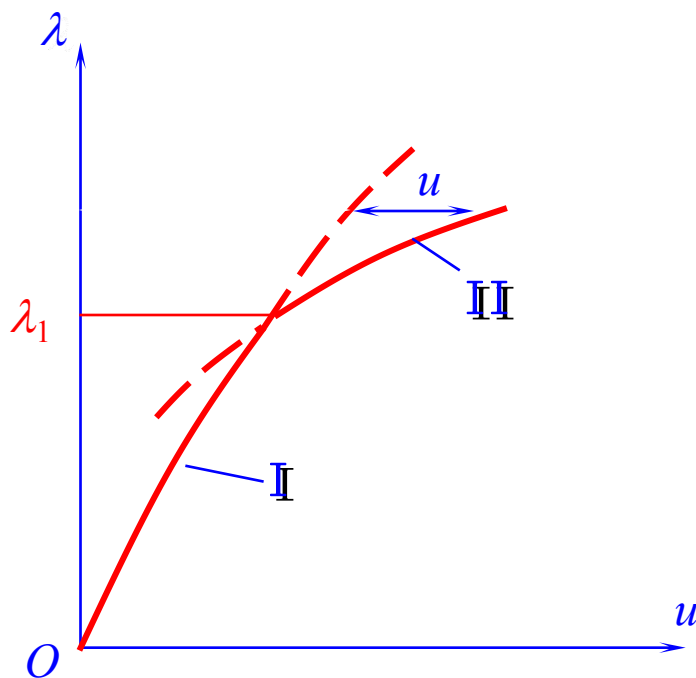
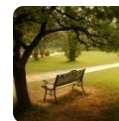
60年代末，当美国的Air Force Flight Dynamics Laboratory(空军飞行动力学实验室)将Koiter的论文全文翻译成英文之后，人们对初始后屈曲理论的兴趣，几乎同时在美国和英国迸发出来。



# ■ 平衡路径及其分叉 分叉点

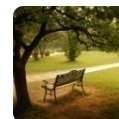


**初始后屈曲理论根据分叉点的特征，基于渐近分析，应用能量准则，确定完善结构对应于分叉点的临界载荷、邻近分叉点的初始后屈曲模态和平衡路径；判别基本状态、分叉点以及初始后屈曲状态的稳定性；研究结构屈曲对于初始微小缺陷的敏感性。**

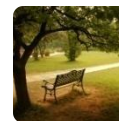


考察图中所示的平衡路径，其中路径 I 称为基本状态或前屈曲状态。在基本状态下，位移矢量  $U(\lambda)$  是载荷参数连续可微函数，且当  $\lambda=0$  时，其值为零。当  $0 \leq \lambda < \lambda_1$  时，基本状态的平衡路径是稳定的， $\lambda_1$  为载荷参数的临界值；当  $\lambda > \lambda_1$  时，基本状态的平衡路径是不稳定的。

在临界点 ( $\lambda = \lambda_1$ ) 处，平衡方程的另一个解，从基本状态分叉出来，形成平衡路径的分叉 II，称为平衡的邻近状态。因而临界点又称为分叉点。在分叉点处，分叉 I 和 II 之间，稳定性发生改变。图1中实线表示稳定分支；虚线为不稳定分支。



# ■ 弹性稳定问题的能量准则



从基本状态 I 通过附加的位移场  $u$ ，得到与之相邻的构形，即状态 II 位能增量它是运动学许可位移场  $u$  的泛函

$$P_{II} - P_I = P[u]$$

基本状态稳定的充要条件是，位能增量恒为正，即

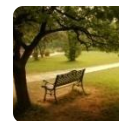
$$P[u] \geq 0$$

位能增量可以展成如下形式

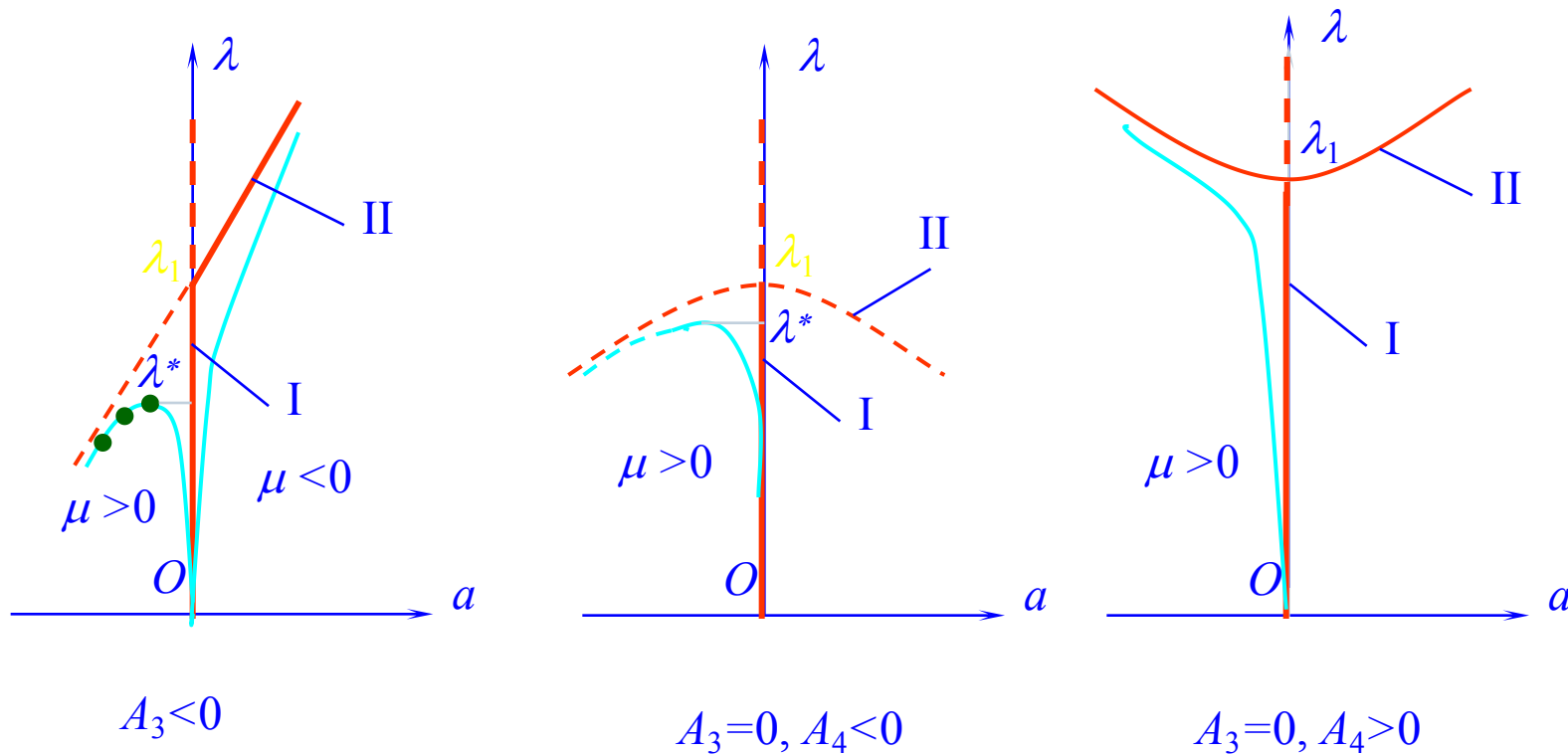
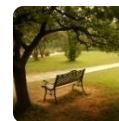
$$P[u] = P_2[u] + P_3[u] + \cdots + P_n[u] + \cdots + P_m^*[u]$$

稳定的必要条件为

$$P_2[u] \geq 0$$



## ■ 后屈曲性态

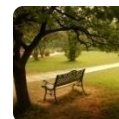




**更精确的一般分析，所得到的重要结果是，初始后屈曲阶段的性态完全取决于临界载荷下平衡的稳定或不稳定性。**

**或者说，初始后屈曲阶段的性态取决于临界分叉点是依然属于基本分叉 I 的稳定部分，还是将其视为基本分叉的不稳定部分。**

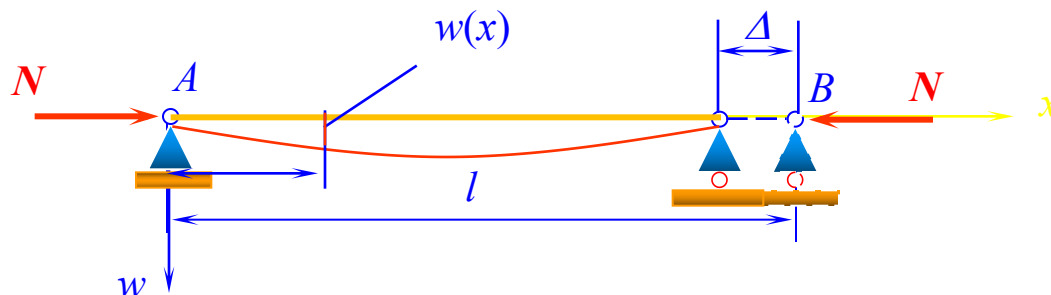
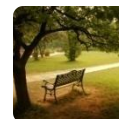
**因为临界点处位能的二次变分半正定，所以为了回答上述问题，必须研究位能的高阶变分。**



**如果后屈曲平衡路径是稳定的，则：  
当载荷超过临界力以后，结构仍然具有  
承载能力。**

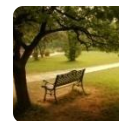


# ■ 临界点的平衡稳定性



考察端部承受压缩载荷的等截面简单支承直杆。不挠曲的直线状态，总是一个平衡构形，即基本状态。同时，假设杆的中心线不发生伸长或缩短。压杆在它的一个主平面内的弯曲状态，视为状态 II，用表示。状态 I 下的弹性应变能为零；状态 II 下，每单位长度杆的弹性应变能等于

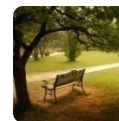
$$\frac{1}{2} \alpha \kappa^2$$



$$\frac{1}{2} \alpha \kappa^2$$

其中  $K$  为曲率， $\alpha$  为弯曲刚度。端部载荷位能的减少，等于载荷与端部移动距离的乘积，即  $-N\Delta$ 。对于不可压缩杆，有

$$\kappa = \pm \frac{\frac{d^2 w}{dx^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dw}{dx}\right)^2}} \quad \Delta = \int_0^l \left[ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} \right] dx$$



于是，从状态 I 过度到状态 II，位能增量表达式

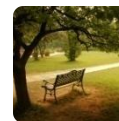
$$P[u] = P[w] = \frac{1}{2} \alpha \int_0^l \frac{\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2}{1 - \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} dx + N \int_0^l \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} - 1 \right] dx$$

经无量纲化，得

$$P^\lambda [\varphi] = \int_0^l \frac{\varphi''}{1 - \varphi'^2} d\xi + 2\pi^2 \beta \lambda \int_0^l \left[ 1 - \sqrt{1 - \varphi'^2} - 1 \right] d\xi$$

其中

$$\xi = \frac{x}{l}, \varphi = \frac{w}{l}, \lambda = \frac{N}{\pi^2 \alpha}, P^\lambda = \frac{P}{\alpha}$$



将被积函数展开，并略去各阶导数高于四次方的项，得

$$\left. \begin{aligned} P^\lambda [\varphi] &= P_2^\lambda [\varphi] + P_4^\lambda [\varphi] \\ P_2^\lambda [\varphi] &= \int_0^l (\varphi''^2 - \pi^2 \lambda \varphi'^2) d\xi \\ P_4^\lambda [\varphi] &= \int_0^l \left( \varphi'^2 \varphi''^2 - \frac{1}{4} \pi^2 \lambda \varphi'^4 \right) d\xi \end{aligned} \right\}$$

由此得到熟知的欧拉临界载荷

$$F_{\text{Per}} = \pi^2 \alpha / l^2$$

$$\varphi_1 = \sin \pi \xi$$



$$P^\lambda[\varphi] = P_2^\lambda[\varphi] + P_4^\lambda[\varphi]$$

$$P_2^\lambda[\varphi] = \int_0^l (\varphi''^2 - \pi^2 \lambda \varphi^2) d\xi$$

$$P_4^\lambda[\varphi] = \int_0^l \left( \varphi'^2 \varphi''^2 - \frac{1}{4} \pi^2 \lambda \varphi^4 \right) d\xi$$

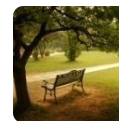
由于上述表达式中没有三次项，所以确定临界状态稳定性的量为

$$A_4 = P_4^\lambda[\varphi_1] = \int_0^l \left( \varphi_1'^2 \varphi_1''^2 - \frac{1}{4} \pi^2 \lambda_1 \varphi_1^4 \right) d\xi = \frac{\pi^6}{32}$$

恒大于0的结果表明，细长压杆临界点的平衡是稳定的。



# ■ 缺陷敏感性



以上关于完善结构分析中，可以解释不同结构的极不相同的后屈曲性态。这种差异主要是由于临界分叉点平衡的稳定和不稳定性所决定的。

但是，尚不能解释为什么某些结构的实际屈曲载荷远低于临界值，例如承受轴向压缩载荷的圆柱壳。为了解释这种性态，必须考虑实际结构中总是存在的缺陷。



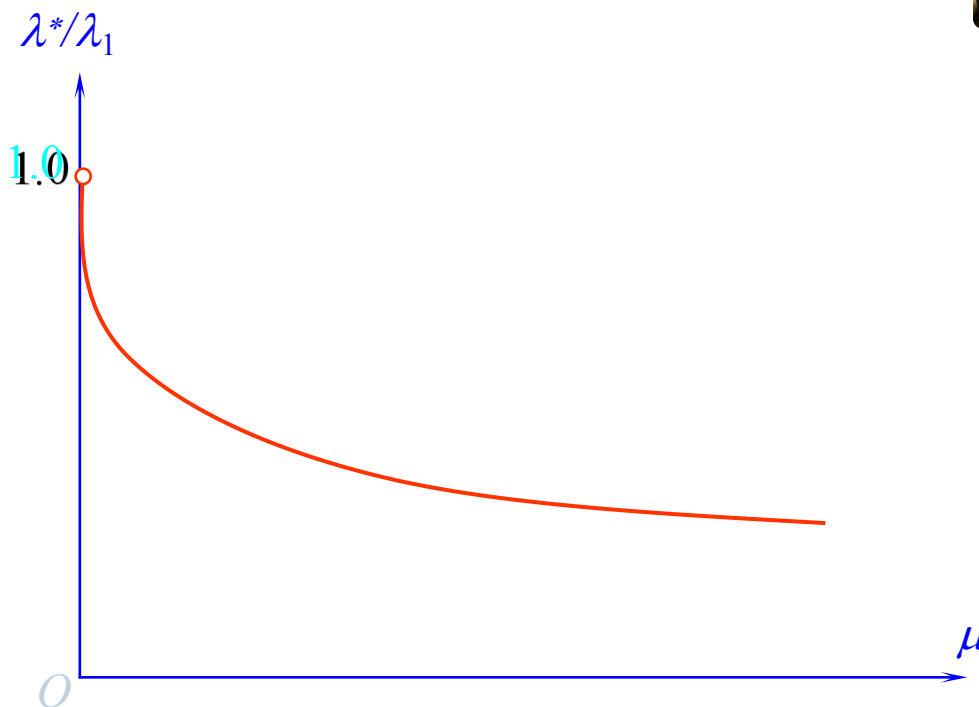
初始缺陷的主要影响是，理想化完善结构的基本状态，对于实际缺陷结构，不是一个平衡构形。

对于实际结构（缺陷结构），必须在描述完善结构从基本状态 I 转变到某个相邻构形 II 时的位能增量上，再增加一“双线性项”：一方面，在初始小缺陷的情形下，修正项必须是关于缺陷线性；另一方面，在绝大多数问题中，完善结构在基本状态下的位移矢量  $U(\lambda)$  和相应的应力都近似地与载荷因子  $\lambda$  成线性关系。于是，考虑初始缺陷影响后，位能增量泛函的修正项具有如下形式：

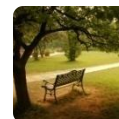
$$\mu\lambda Q_1[u]$$

其中  $\mu$  为缺陷参数， $Q_1[u]$  描述缺陷大小；为从状态 I 到状态 II 的位移场的线性泛函。这一泛函的形式取决于所研究的缺陷类型。

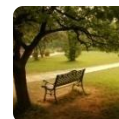
缺陷结构的进一步分析则与完善结构分析相类似。



可以看出，甚至对于微小的初始缺陷， $\lambda^*$  和  $\lambda_1$  的差别都是很可观的。这是因为，作为缺陷参数 ( $\mu$ ) 的函数， $\lambda^*/\lambda_1$  曲线在  $\lambda^*/\lambda_1 = 1$ ， $\mu = 0$  处具有竖直切线。



**上述结果解释了，为什么临界载荷的试验值总是明显小于理想化模型的理论值；也解释了，为什么实际结构的实验值非常分散。**



## 参考文献

# 球壳的后屈曲性态与缺陷敏感性 初始后屈曲理论及其应用



謝 謝 大 家