

范钦珊 李 晨 李栋栋 孙 伟 (特邀)

材料力学

Mechanics of Materials



2019-5-5

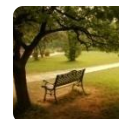


自主学习 + 深度研讨



单元9 稳定性分析与稳定性设计

(Unit 9 Stability analysis and stability design of column)



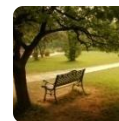
开篇之说

有别于强度、刚度的稳定性问题

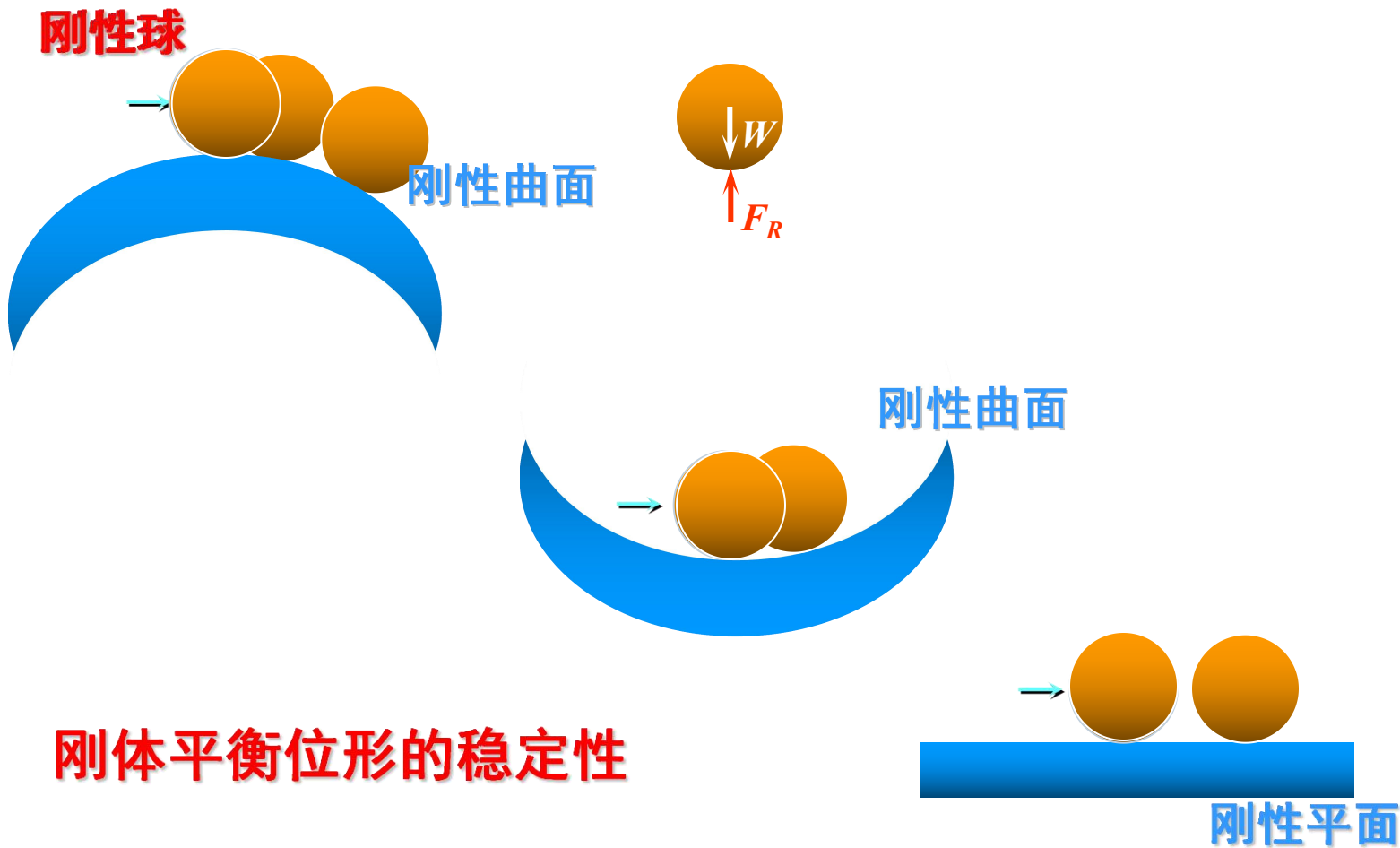


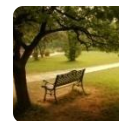
开篇之说

刚体的平衡稳定性回顾

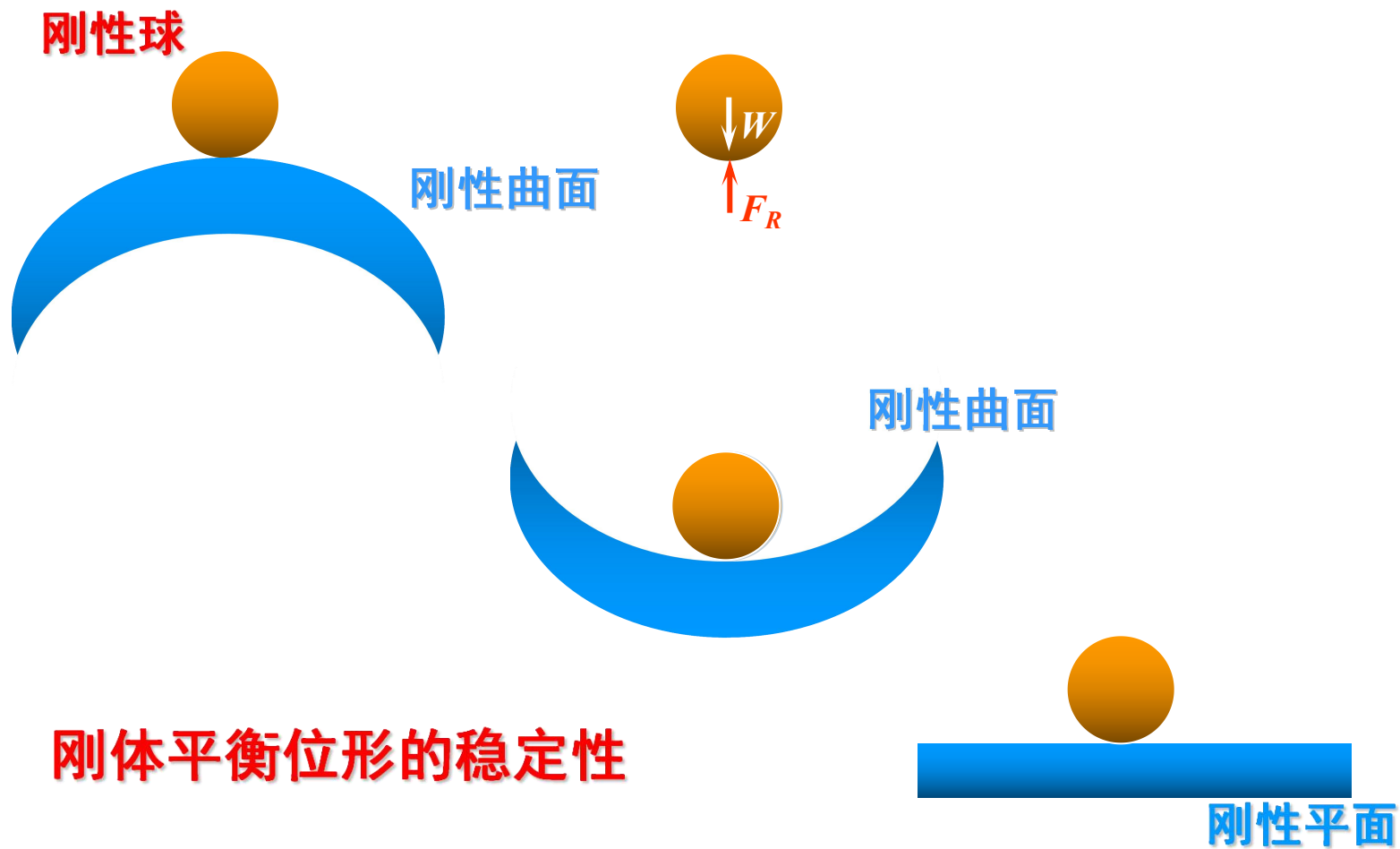


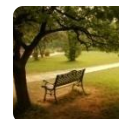
开篇之说





开篇之说

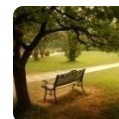




开篇之说

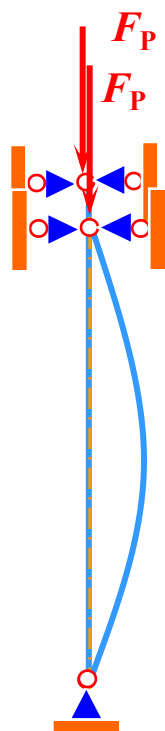
与刚体平衡类似，弹性体平衡也存在稳定与不稳定问题。

细长杆件承受轴向压缩载荷作用时，将会由于平衡的不稳定性而发生失效，这种失效称为**稳定性失效(failure by lost stability)**，又称为**屈曲失效(failure by buckling)**。



开篇之说

平衡构形——压杆的两种平衡构形 (equilibrium configuration)

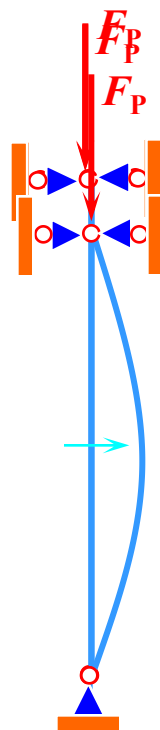


$F_P < F_{Pcr}$: 直线平衡构形

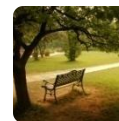
$F_P > F_{Pcr}$: 弯曲平衡构形



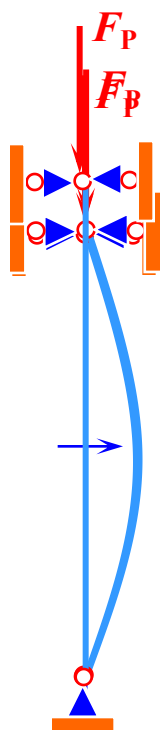
开篇之说



$F_P < F_{Pcr}$: 在扰动作用下，直线平衡构形转变为弯曲平衡构形，扰动除去后，能够恢复到直线平衡构形，则称原来的直线平衡构形是稳定的。



开篇之说



$F_P > F_{Pcr}$: 在扰动作用下，直线平衡构形转变为弯曲平衡构形，扰动除去后，不能恢复到直线平衡构形，则称原来的直线平衡构形是不稳定的。

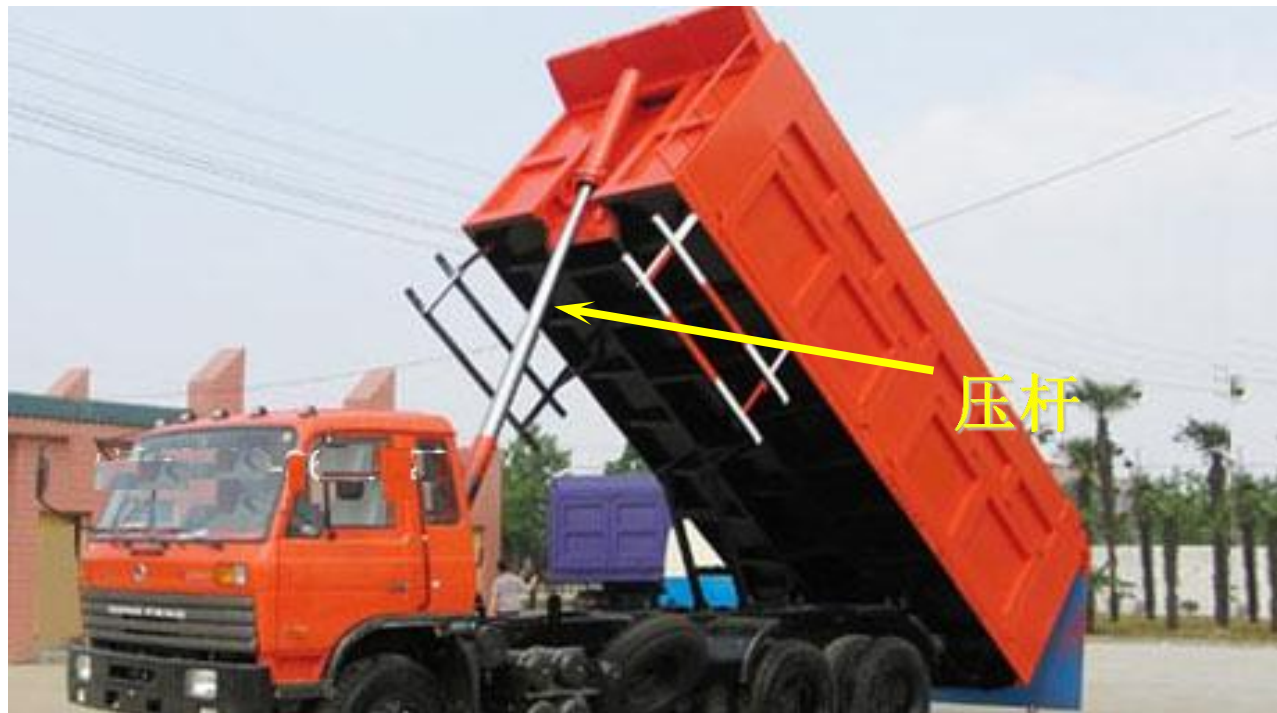


开篇之说





开篇之说





开篇之说



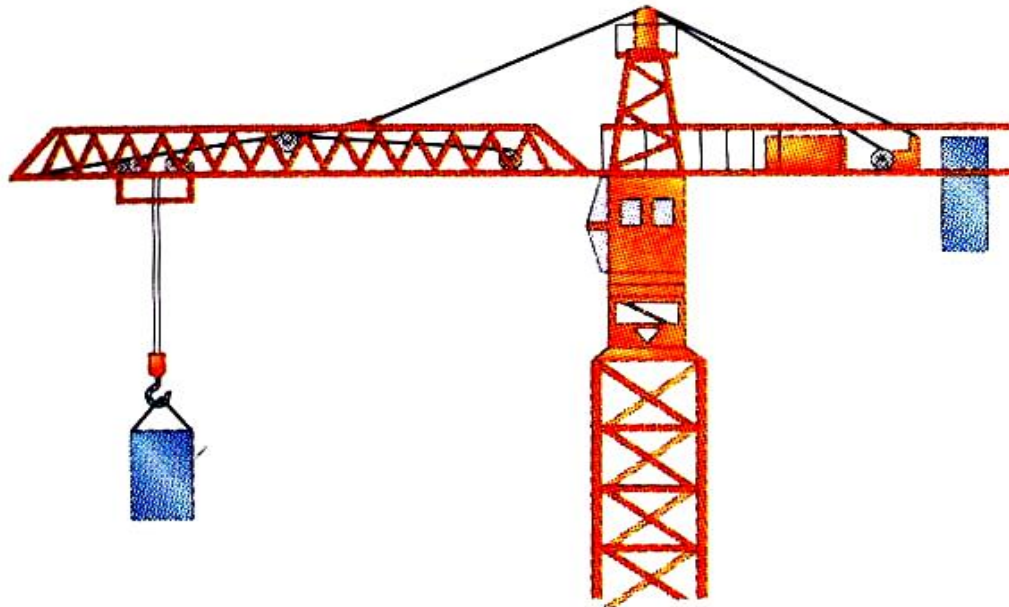


开篇之说





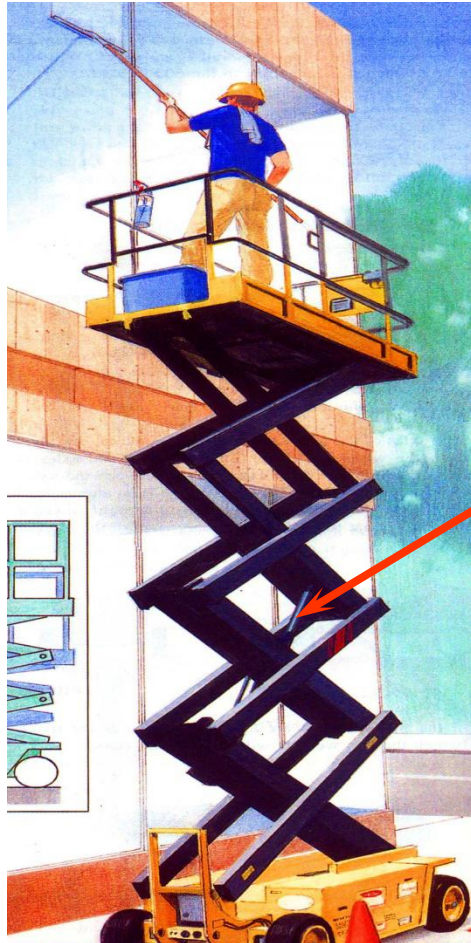
开篇之说



桁架中的压杆



开篇之说



液压缸顶杆



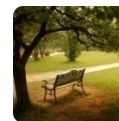
开篇之说



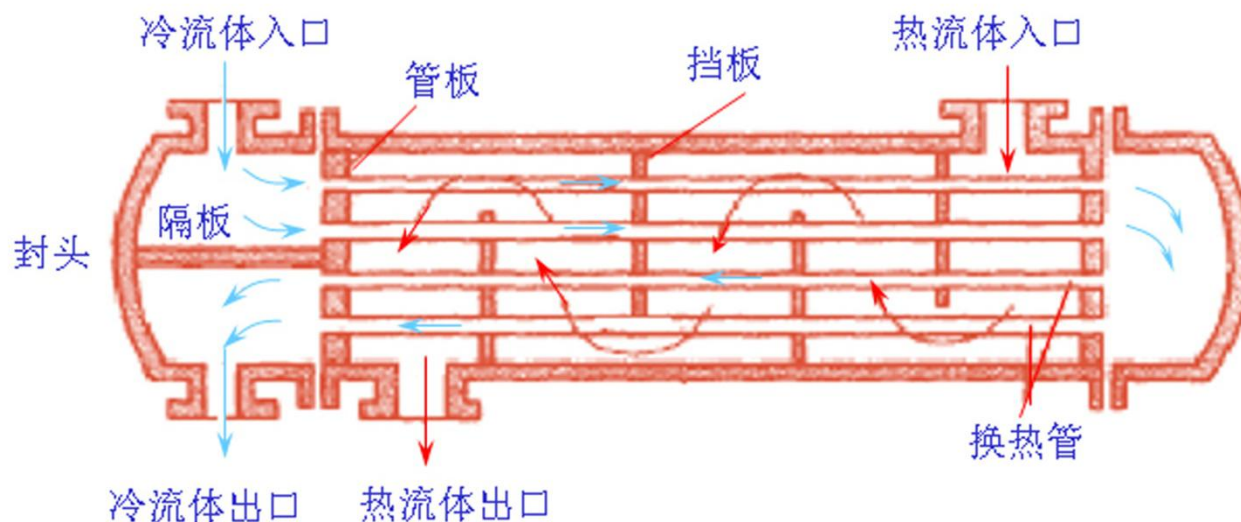


开篇之说

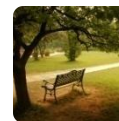




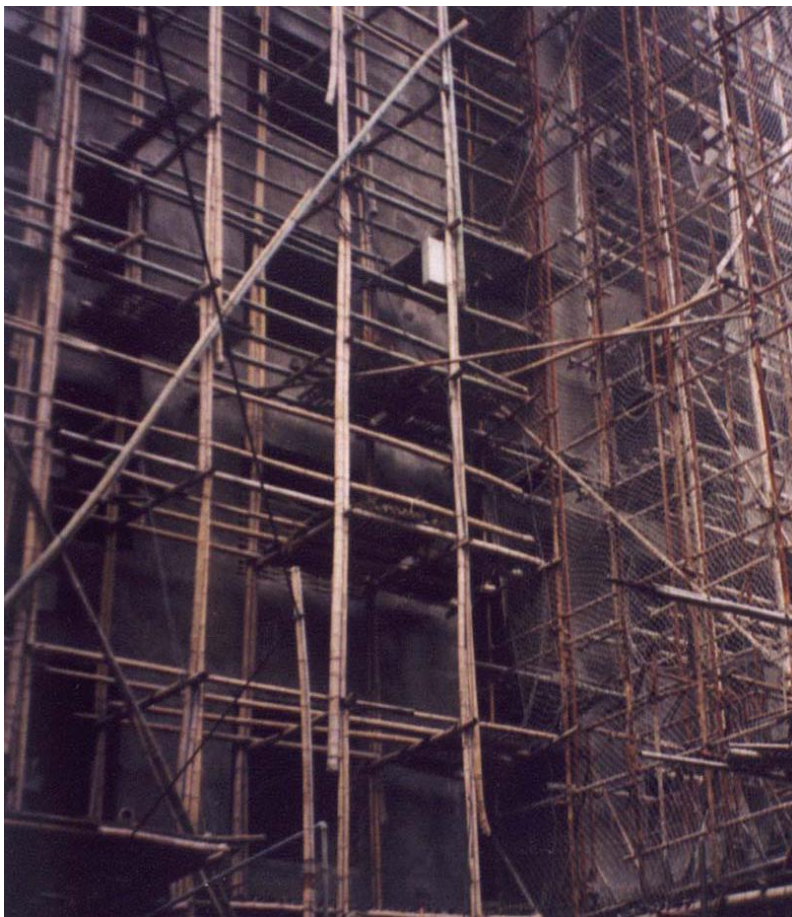
开篇之说



换热管热膨胀受到两端管板的限制，因而产生轴向压力



开篇之说



脚手架中的压杆



开篇之说

艺术中稳定性问题



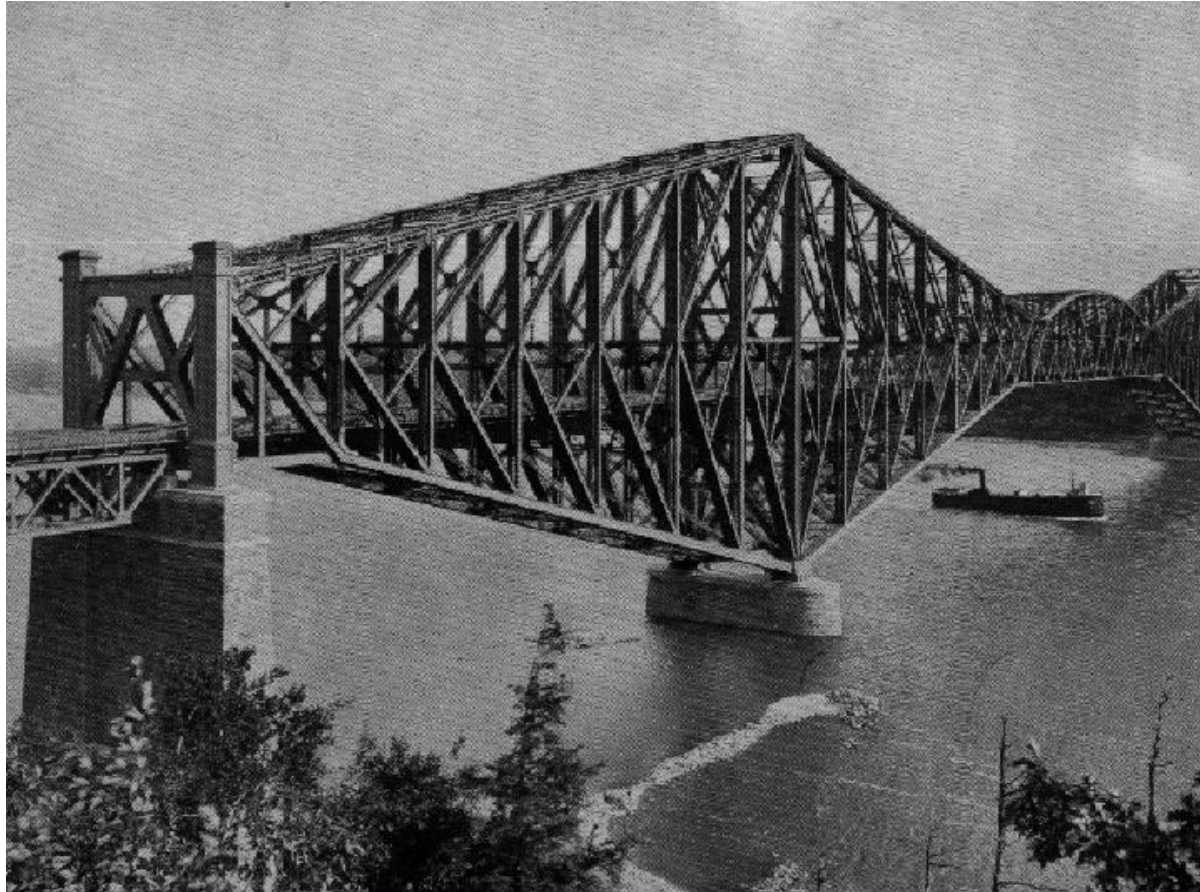


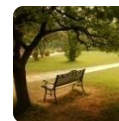
开篇之说

“ Such failures can be catastrophic and lead to a large loss of life as well as major economic loss”.



开篇之说





开篇之说



由于设计上的原因，加拿大魁北克大桥在实际承载重量远低于设计承载重量的情形下发生两次坍塌事故。

第一次，1907年8月29日，死亡75人。

第二次，1916年9月11日，死亡13人。





开篇之说

稳定性失效区别于强度失效——整体行为与局部行为。

稳定性失效区别于刚度失效——平衡构形的突然转变与弹性变形的超限。

稳定性问题与刚度问题有关联——都与弯曲刚度和约束有关。



自主学习从问题开始

什么是稳定？什么是不稳定？二者之间的临界点怎样确定？

什么是屈曲失效？是不是所有压杆都会发生屈曲失效？

根据线性理论得到的结果哪些是正确的？哪些是不正确的？



- 压杆稳定的基本概念
- 两端铰支压杆的临界载荷 欧拉公式
- 不同刚性支承对压杆临界载荷的影响
- 临界应力与临界应力总图
- 压杆稳定性设计的安全因数法
- 深度研讨



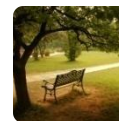
什么是稳定？ 什么是不稳定？



■ 压杆稳定的基本概念

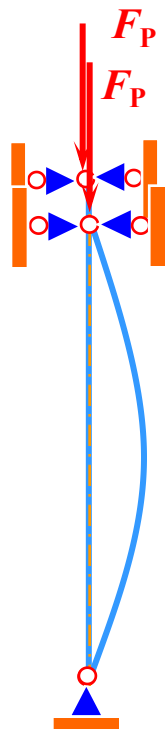
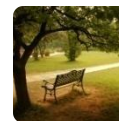


- ★ 判别弹性平衡稳定性的静力学准则
- ★ 压杆的平衡路径及其分叉
- ★ 细长压杆临界点平衡的稳定性



★ 判别弹性平衡稳定性的静力学准则

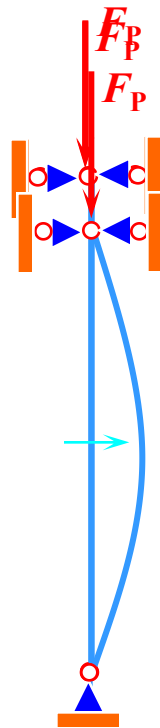
(static criterion for elastic stability)



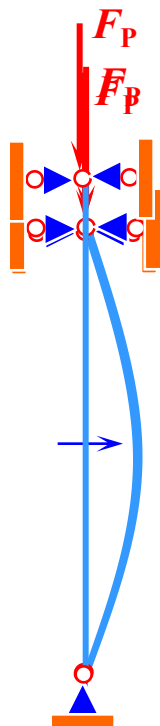
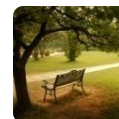
平衡构形——压杆的两种平衡构形 (equilibrium configuration)

$F_P < F_{Per}$: 直线平衡构形

$F_P > F_{Per}$: 弯曲平衡构形



$F_P < F_{Pcr}$: 在扰动作用下，直线平衡构形转变为弯曲平衡构形，扰动除去后，能够恢复到直线平衡构形，则称原来的直线平衡构形是稳定的。



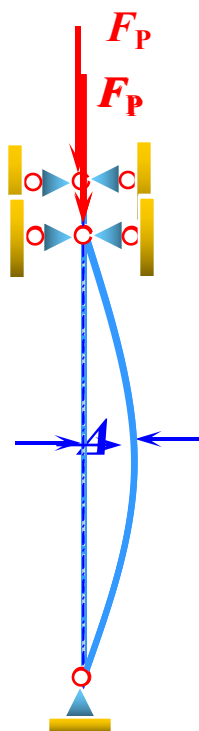
$F_P > F_{Pcr}$: 在扰动作用下，直线平衡构形转变为弯曲平衡构形，扰动除去后，不能恢复到直线平衡构形，则称原来的直线平衡构形是不稳定的。



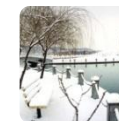
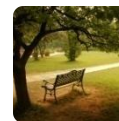
★ 压杆的平衡路径及其分叉



屈曲位移

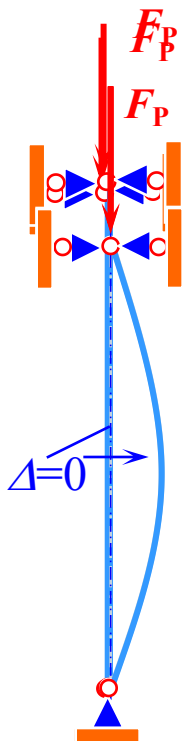


压杆从直线平衡构形到弯曲平衡构形的转变过程，称为“**屈曲**”。由于屈曲，压杆产生侧向位移，称为屈曲位移。

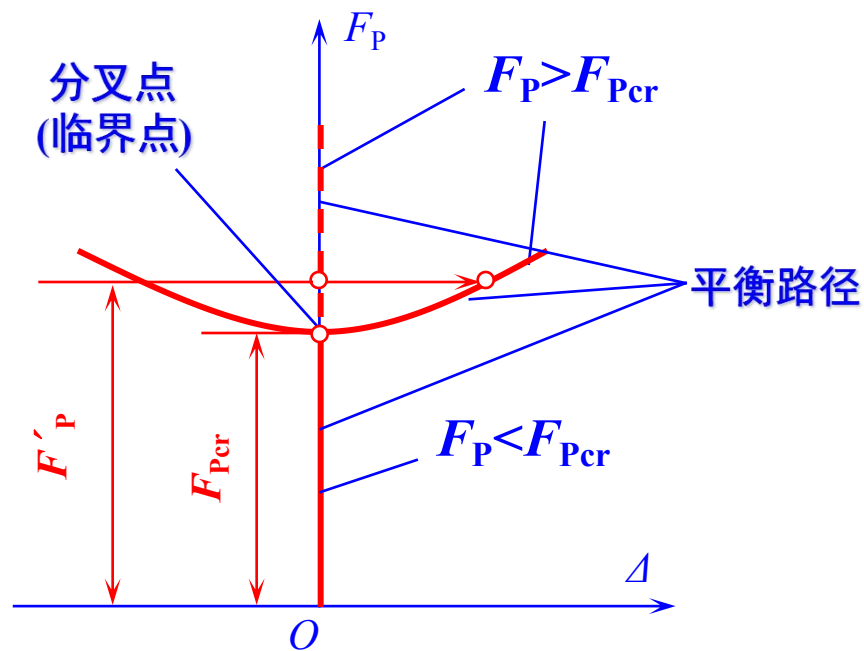
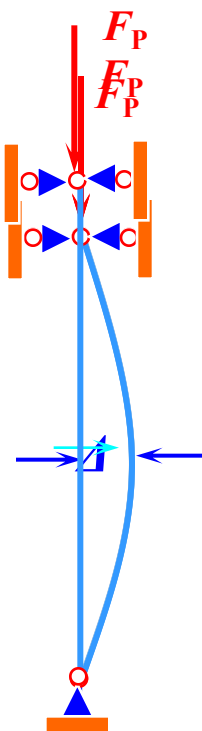


平衡路径及其分叉

$F_P < F_{Per}$

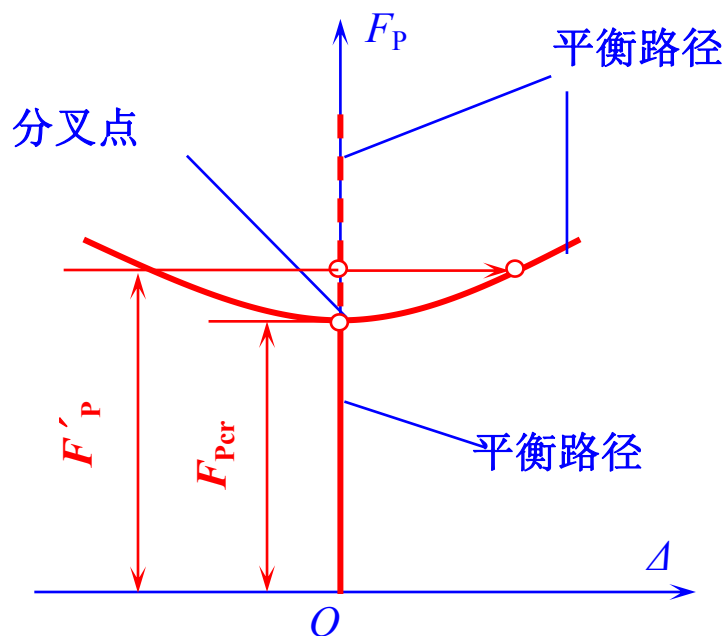


$F_P > F_{Per}$





平衡路径及其分叉



平衡路径的分叉点：
平衡路径开始出现分叉的那一点。

从分叉点开始，对应于同一个载荷，会出现两种平衡构形——直线的和弯曲的。直线平衡构形是不稳定的（平衡路径用虚线表示），在微小扰动下会转变为弯曲的平衡构形。



平衡路径及其分叉

对于细长压杆，稳定的直线的平衡构形与不稳定的直线的平衡构形之间的分界点，称为**临界点 (critical point)**。临界点所对应的载荷称为**临界载荷 (critical load) 或分叉载荷 (bifurcation load)**，用 F_{Pcr} 表示。

当压缩载荷大于临界载荷时，在任意微小的外界扰动下，压杆都要由直线的平衡构形转变为弯曲的平衡构形，这一过程称为**屈曲 (buckling) 或失稳 (lost stability)**。对于细长压杆，由于屈曲过程中出现平衡路径的分叉，所以又称为**分叉屈曲 (bifurcation buckling)**。



根据线性理论得到的结果哪些是正确的？哪些是不正确的？



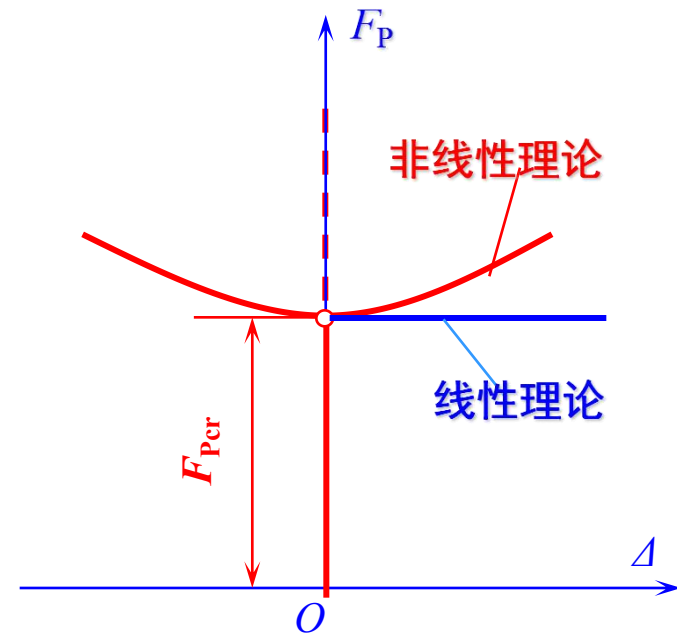
★ 细长压杆**临界点**的平衡稳定性

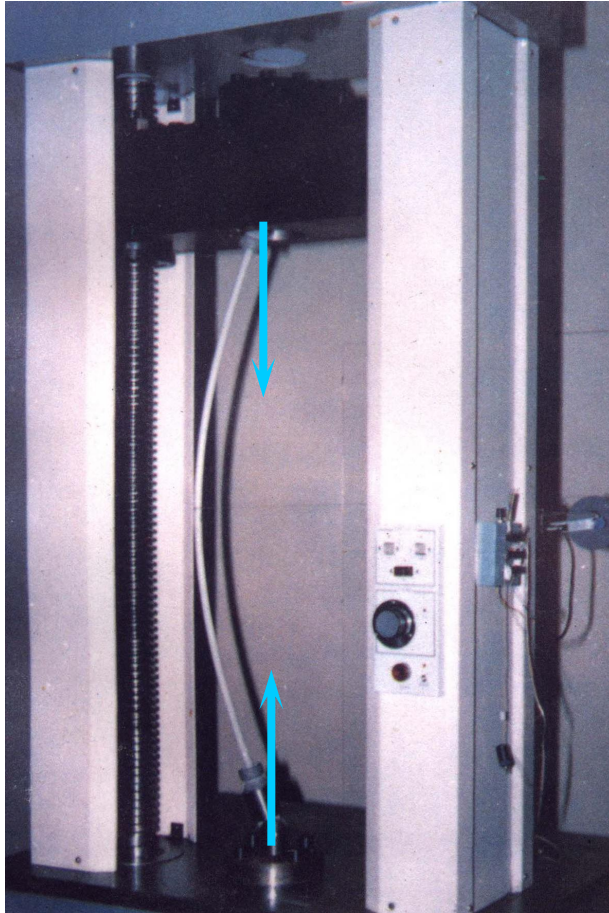


线性理论认为，细长压杆在临界点以及临界点以后的平衡路径都是随遇的，即：载荷不增加，屈曲位移不断增加。压杆从此丧失承载能力。

精确的非线性理论分析结果表明，细长压杆在临界点以及临界点以后的平衡路径都是稳定的，因此压杆仍然具有承载能力。

清华大学于20世纪90年代初所作的细长杆屈曲实验结果证明了非线性分析所得到的结论。

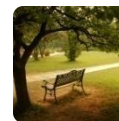




细长压杆稳定性实验

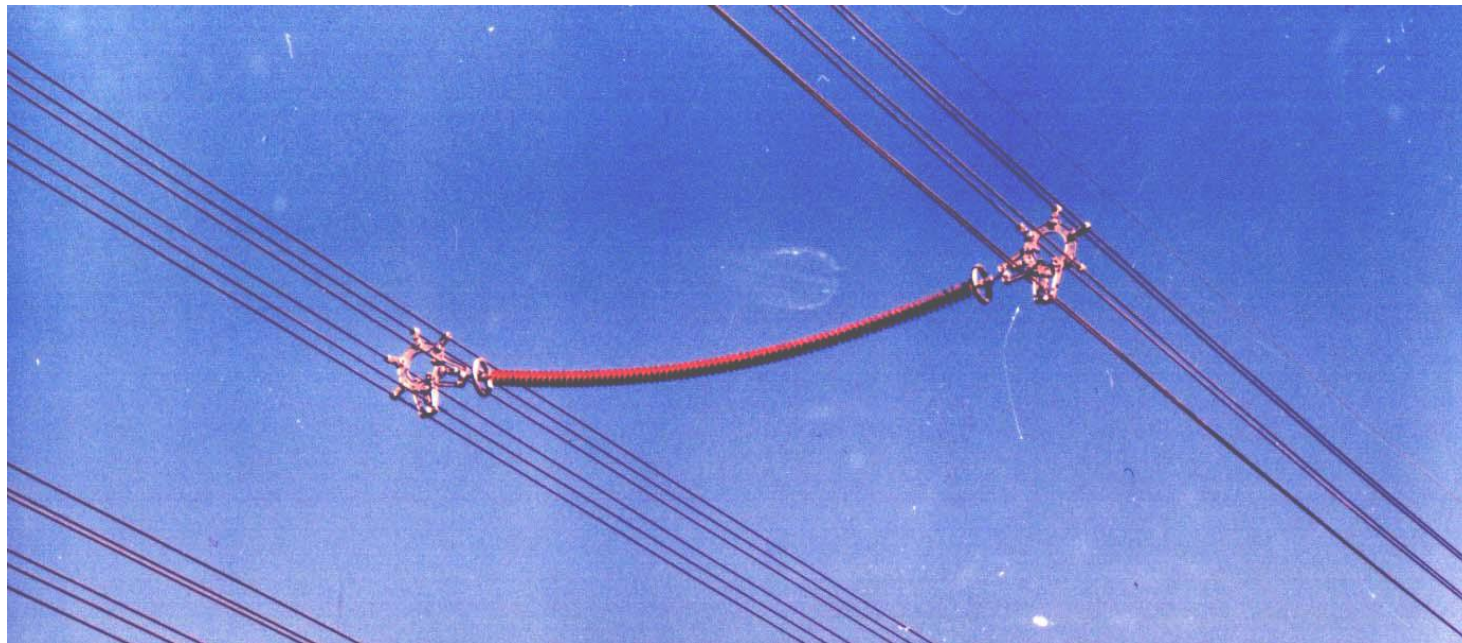
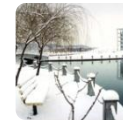


在很多情形下，屈曲将导致构件失效，这种失效称为**屈曲失效 (failure by buckling)**。由于屈曲失效往往具有突发性，常常会产生灾难性后果，因此工程设计中需要认真加以考虑。

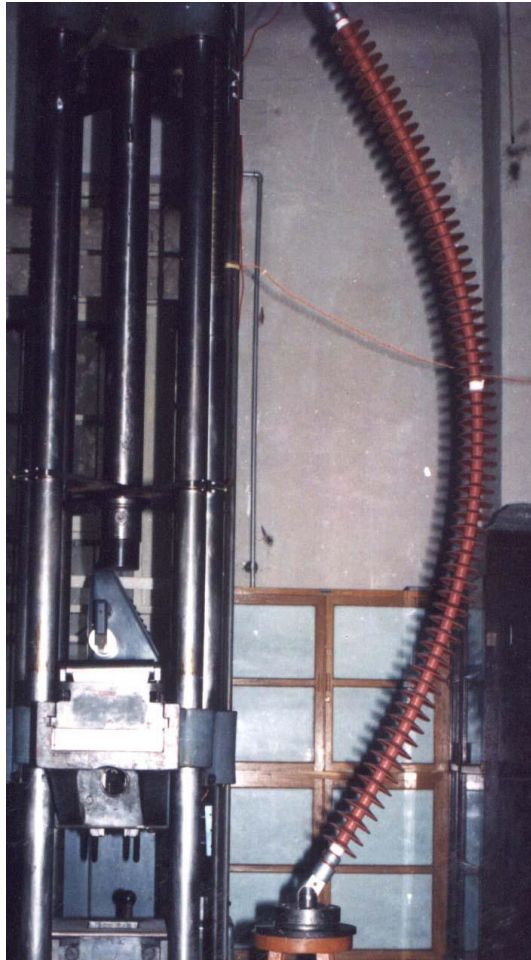


但是，由于超过临界点以后的平衡路径也是稳定的，所以，临界点以后结构仍然具有承载能力。

这一结论对于某些工程具有重要意义。



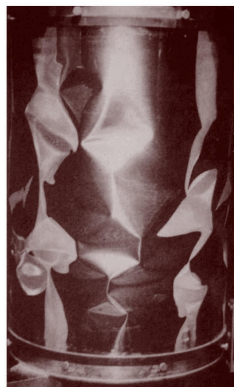
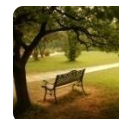
高压输电线路保持相间距离的受压构件



工程构件稳定性实验



工程构件稳定性实验



在推迟发射,泄出推进剂时,由于操作人员思想过于紧张,忘了开通...
在大气压力的作用下,弹...
了都十分紧张,认为这是...
发射了。钱学森听完汇报...
情况后,认为壳体的变形并未达到结构...
他结合自己在美国做圆柱壳体研究的经验认为,点火发射后,箱体内要充气,弹体内压力会升高,壳体就会恢复原来的形状,所以他主张发射照常进行。

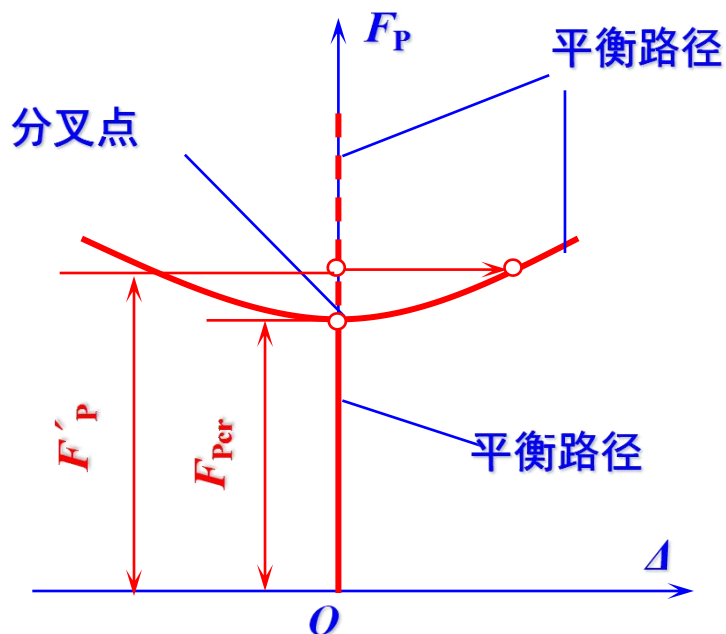
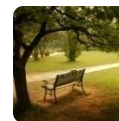
由于后屈曲平衡路径是稳定的,所以导弹圆柱体仍然具有承载能力,而且



稳定和不稳定之间的临界点怎样确定？



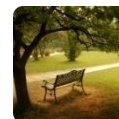
■ 两端铰支压杆的临界载荷欧拉公式



从平衡路径可以看出，当 $\Delta \rightarrow 0$ 时
 $F_P \rightarrow F_{Per}$ 。

这表明，当 F_P 无限接近临界载荷
 F_{Per} 时，在直线平衡构形附近无穷
 小的邻域内，存在微弯的平衡构形。

根据这一平衡构形，由平衡条件
 和小挠度微分方程，以及端部约束
 条件，即可确定临界载荷。

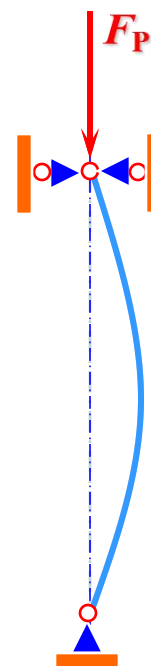


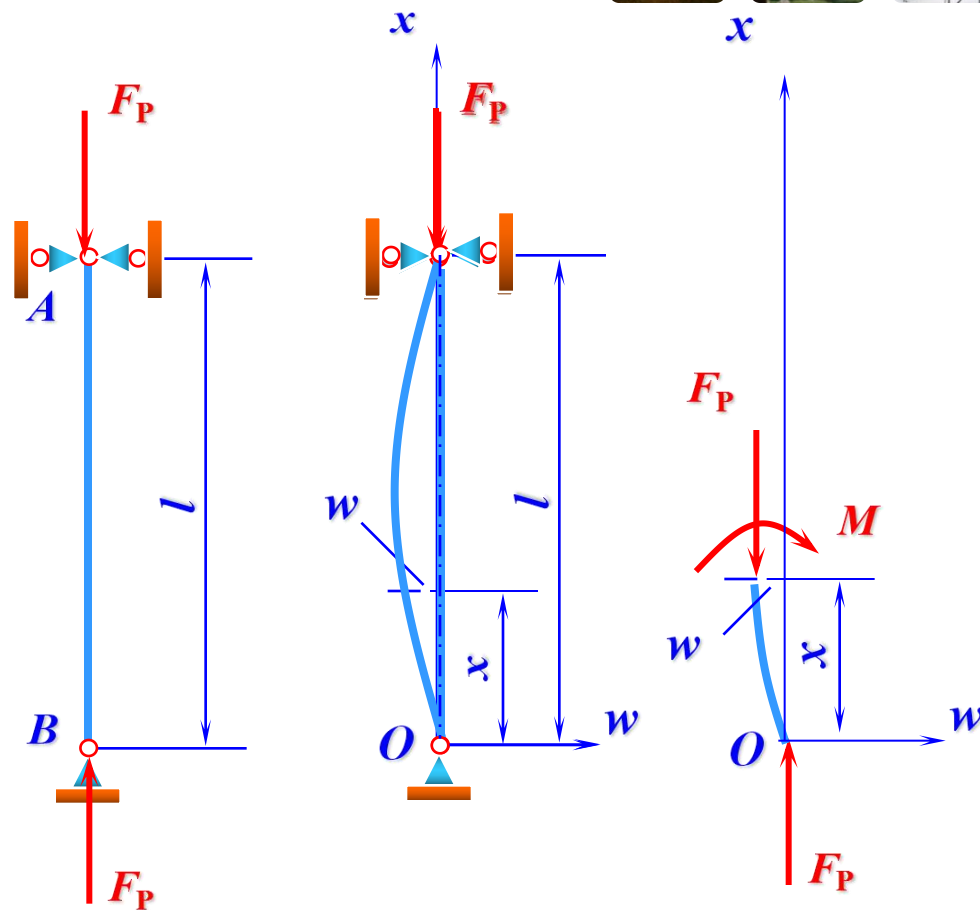
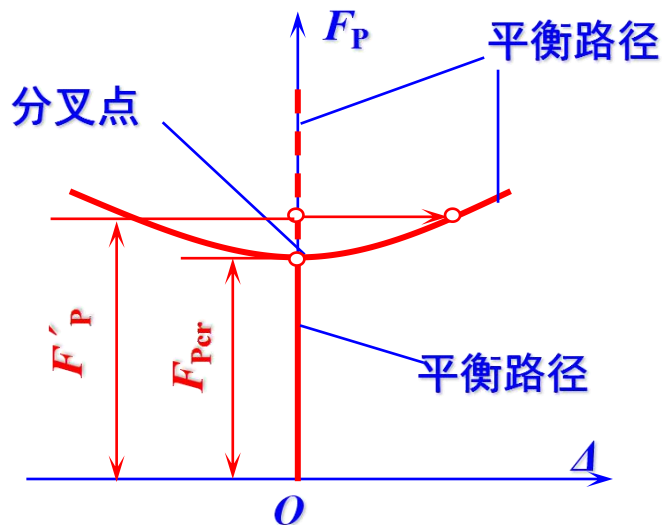
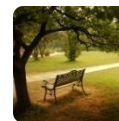
压杆稳定性的分析方法与分析模型

平衡方法是分析压杆稳定性的基本方法。

与材料力学其他的平衡方法不同的是，考虑的是变形以后压杆的平衡。

平衡所采用的模型，不是压杆的整体，而是压杆的局部。

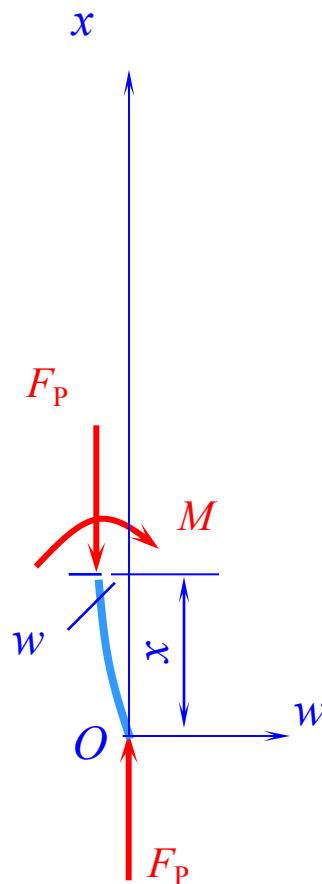




假设压力略大于临界力，在外界扰动下压杆处于微弯状态。考察微弯状态下局部压杆的平衡：



假设压力略大于临界力，在外界扰动下压杆处于微弯状态。
考察微弯状态下局部压杆的平衡：



$$M(x) = F_P w(x)$$

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = 0$$

$$k^2 = \frac{F_P}{EI}$$



$$\frac{d^2 w}{dx^2} + k^2 w = 0 \quad k^2 = \frac{F_P}{EI}$$

微分方程的解

$$w = A \sin kx + B \cos kx$$

边界条件

$$w(0)=0 \quad , \quad w(l)=0$$



微分方程的解

$$w = A \sin kx + B \cos kx$$

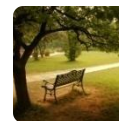
边界条件

$$w(0)=0 \quad , \quad w(l)=0$$

$$\begin{cases} 0 \times A + 1 \times B = 0 \\ \sin kl \times A + \cos kl \times B = 0 \end{cases}$$

根据线性代数知识，上述方程中，常数 A 、 B 不全为零的条件是它们的系数行列式等于零：

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin kl & \cos kl \end{vmatrix} = 0 \quad \sin kl = 0$$



$$\sin kl = 0$$

$$k^2 = \frac{F_P}{EI}$$

$$kl = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots,$$

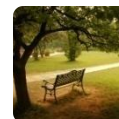


由此得到临界载荷

$$F_{\text{Pcr}} = \frac{\pi^2 n^2 EI}{l^2}$$

最小临界载荷

$$F_{\text{Pcr}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$



$$\begin{cases} 0 \times A + 1 \times B = 0 \\ \sin kl \times A + \cos kl \times B = 0 \end{cases} \longrightarrow B = 0$$

$$w = A \sin kx + B \cos kx$$

得到屈曲位移函数

$$w(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}$$

其中 A 为未定常数。这表明**屈曲位移**是不确定的量。这与开始推导公式时假设压杆处于任意微弯状态是一致的。

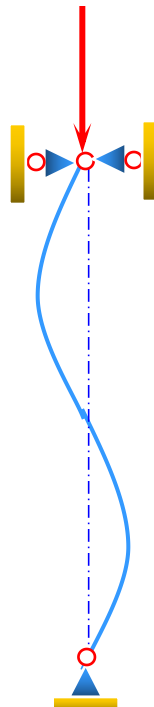


屈曲模态与屈曲模态阶数

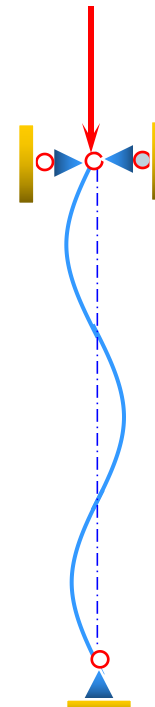
$$F_{Pcr} = \frac{\pi^2 n^2 EI}{l^2}$$



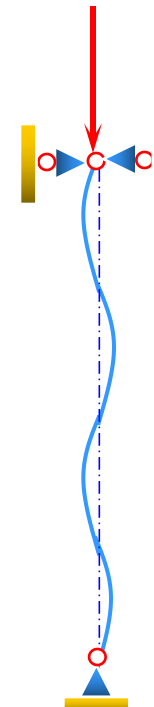
$n=1$



$n=2$



$n=3$



$n=4$



■ 不同刚性支承对压杆临界载荷的影响



不同刚性支承条件下的压杆，由静力学平衡方法得到的平衡微分方程和边界条件都可能各不相同，确定临界载荷的表达式亦因此而异，但基本分析方法和分析过程却是相同的。对于细长杆，这些公式可以写成通用形式：

$$F_{\text{Pcr}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} \quad F_{\text{Pcr}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

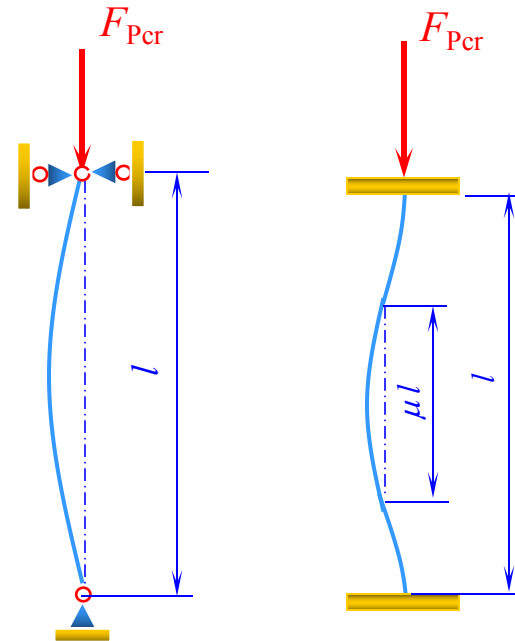
这一表达式称为欧拉公式。其中 μl 为不同压杆屈曲后挠曲线上正弦半波的长度，称为**有效长度(effective length)**； μ 为反映不同支承影响的系数，称为**长度系数 (coefficient of length)**。



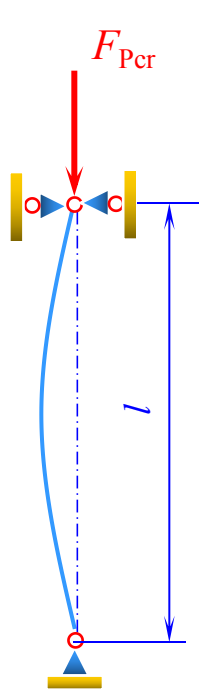
$$F_{\text{Pcr}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

这一表达式称为欧拉公式。其中 μl 为不同压杆屈曲后挠曲线上正弦半波的长度，称为**有效长度 (effective length)**； μ 为反映不同支承影响的系数，称为**长度系数 (coefficient of length)**。

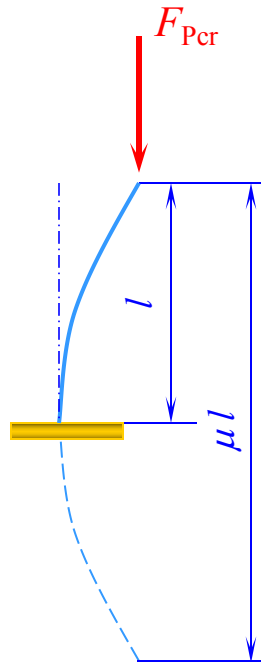
有效长度就是压杆屈曲曲线上正弦半波波型的长度；长度系数即是这一正弦半波长度与两端铰支压杆屈曲后的正弦半波长度的比值。



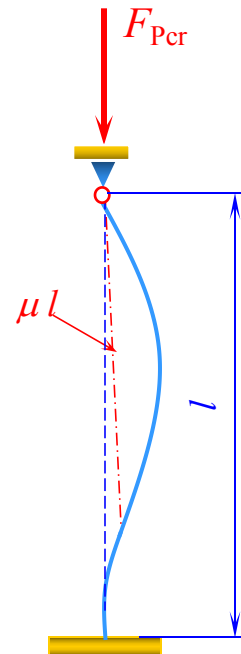
$$\mu = \frac{\mu l}{l}$$



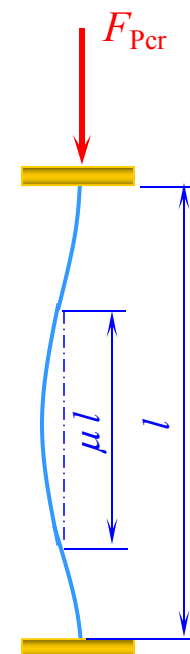
两端铰支
 $\mu=1.0$



一端自由，
一端固定
 $\mu=2.0$



一端铰支，
一端固定
 $\mu=0.7$

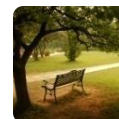


两端固定
 $\mu=0.5$



$$F_{\text{Per}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

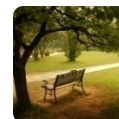
需要注意的是, 临界载荷公式只有在压杆的微弯曲状态下仍然处于**弹性状态**时才是成立的。



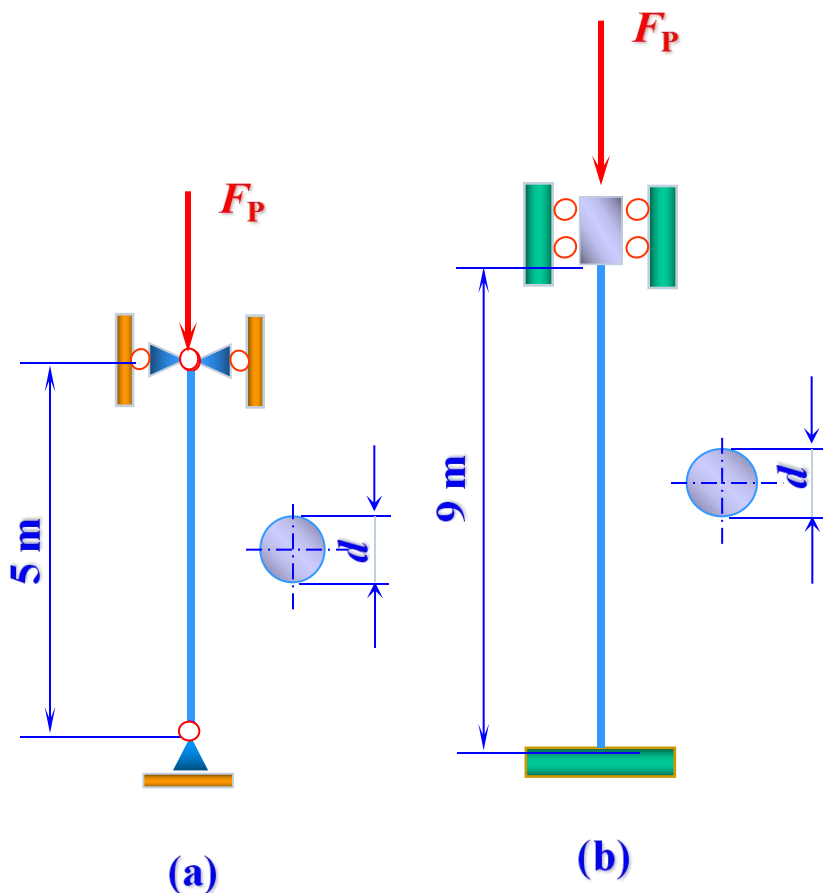
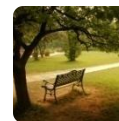
什么是屈曲失效？是不是所有压杆都会发生屈曲失效？



■ 临界应力与临界应力总图



- ★ 临界应力与长细比的概念
- ★ 三类不同压杆的不同失效形式
- ★ 三类压杆的临界应力公式
- ★ 临界应力总图与 λ_P 、 λ_S 值的确定



两根直径均为 d 的压杆，材料都是Q235钢，但二者长度和约束条件各不相同。试；

分析：哪一根压杆的临界载荷比较大？

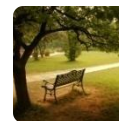


临界应力与长细比的概念

前面已经提到欧拉公式只有在**弹性范围内**才是适用的。这就要求在临界载荷作用下，压杆在直线平衡构形时，其横截面上的正应力小于或等于材料的比例极限，即

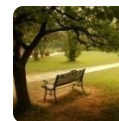
$$\sigma_{cr} = \frac{F_{Pcr}}{A} \leq \sigma_p$$

其中 σ_{cr} 称为**临界应力(critical stress)**； σ_p 为材料的比例极限。



对于某一压杆，当临界载荷 F_p 尚未算出时，不能判断压杆横截面上的应力是否处于弹性范围；当临界载荷算出后，如果压杆横截面上的应力超过弹性范围，则还需采用超过比例极限的临界载荷计算公式。这些都会给计算带来不便。

能否在计算临界载荷之前，预先判断哪一类压杆将发生弹性屈曲？哪一类压杆将发生超过比例极限的非弹性屈曲？哪一类不发生屈曲而只有强度问题？回答当然是肯定的。为了说明这一问题，需要引进**长细比 (slenderness)** 的概念。



用长细比表示的细长杆临界应力公式

$$\sigma_{\text{cr}} = \frac{F_{\text{Pcr}}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} \quad \text{——长细比 (slenderness) 。}$$



$$\lambda = \frac{\mu l}{i}$$

其中， i 为压杆横截面的惯性半径，由下式确定：

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$$

从上述二式可以看出，长细比反映了压杆长度、支承条件以及压杆横截面几何尺寸对压杆承载能力的综合影响。

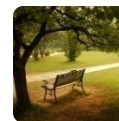


三类不同压杆的不同失效形式

细长杆——长细比 λ 大于或等于某个极限值 λ_p 时，压杆将发生**弹性屈曲**。这时，压杆在直线平衡构形下横截面上的正应力不超过材料的比例极限，这类压杆称为细长杆。

中长杆——长细比 λ 小于 λ_p ，但大于或等于另一个极限值 λ_s 时，压杆也会发生屈曲。这时，压杆在直线平衡构形下横截面上的正应力已经超过材料的比例极限，截面上某些部分已进入塑性状态。这种屈曲称为**非弹性屈曲**。这类压杆称为中长杆。

粗短杆——长细比 λ 小于极限值 λ_s 时，压杆不会发生屈曲，但将会发生**屈服**。这类压杆称为粗短杆。



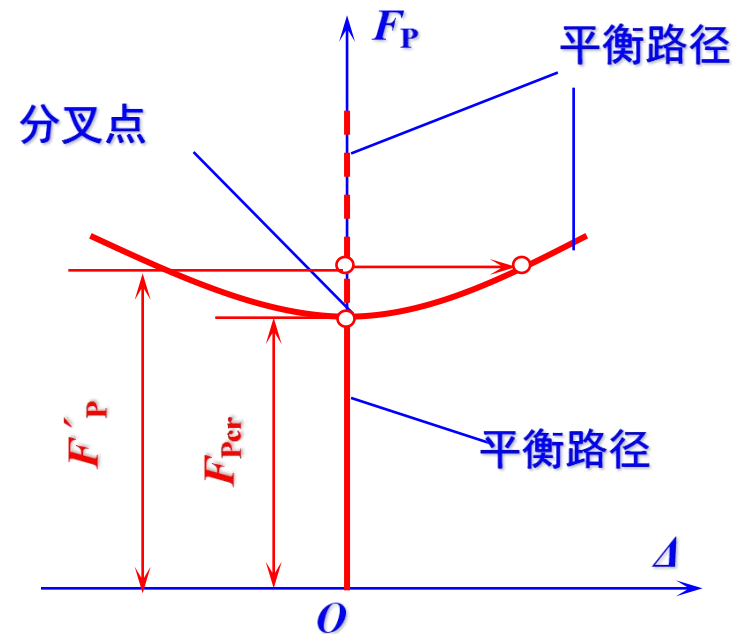
三类不同压杆的不同失效形式

需要指出的是，细长杆不仅仅是几何意义上的细长，因为长细比还与约束条件有关。



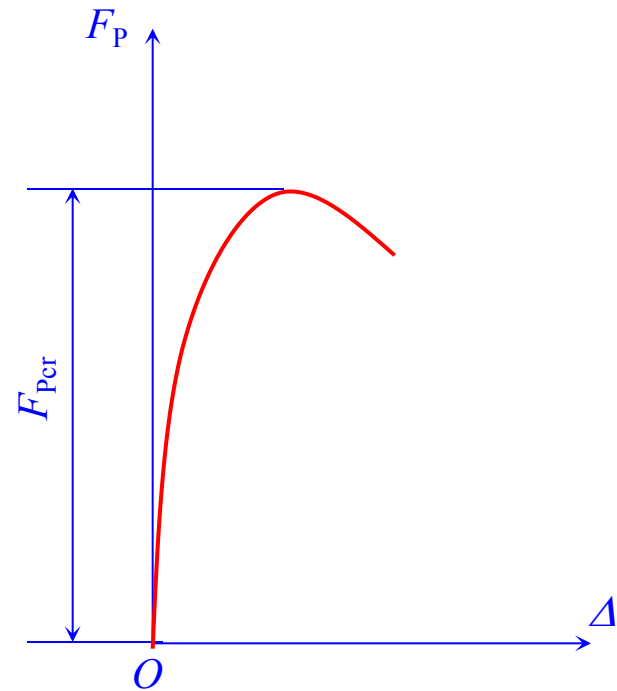
需要特别指出的是，细长杆和中长杆在轴向压缩载荷作用下，虽然都会发生屈曲，但这是两类不同的屈曲。

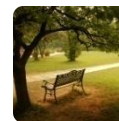
从平衡路径看，细长杆的轴向压力超过临界力后(如图所示)，平衡路径的分叉点即为临界点。这类屈曲称为分叉屈曲。



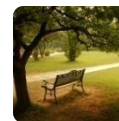


中长杆在轴向压缩载荷作用下，其平衡路径没有分叉和分叉点，只有极值点，这类屈曲称为极值点屈曲(limited point buckling)。





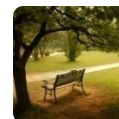
细长杆刚开始发生屈曲时，压杆仍处在弹性范围内；而中长杆发生屈曲时则伴随有塑性变形。



三类压杆的临界应力公式

对于细长杆，临界应力为

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{Pcr}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu\lambda)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

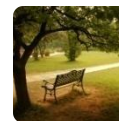


三类压杆的临界应力公式

对于**中长杆**，由于发生了塑性变形，理论计算比较复杂，工程中大多采用直线经验公式计算其临界应力，最常用的是直线公式：

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda$$

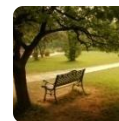
其中 **a** 和 **b** 为与材料有关的常数，单位为MPa。



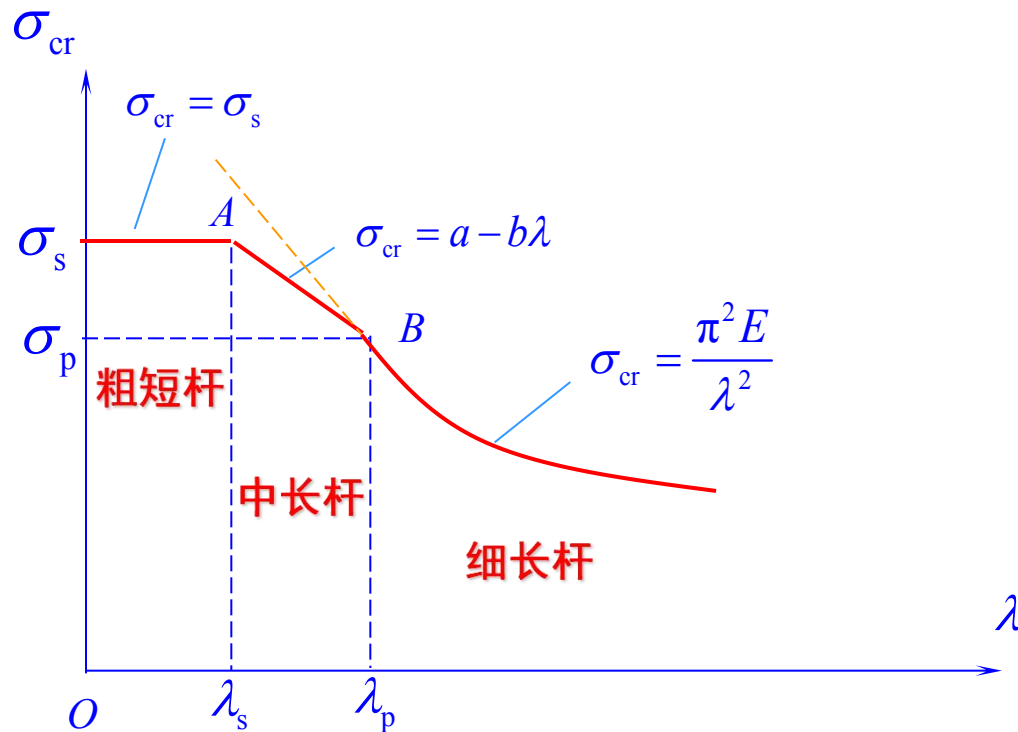
三类压杆的临界应力公式

对于**粗短杆**，因为不发生屈曲，而只发生屈服(韧性材料)，故其临界应力即为材料的屈服应力：

$$\sigma_{cr} = \sigma_s$$

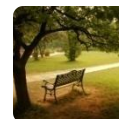


根据三种压杆的临界应力表达式，在坐标系中可以作出关系曲线，称为**临界应力总图**(figures of critical stresses)



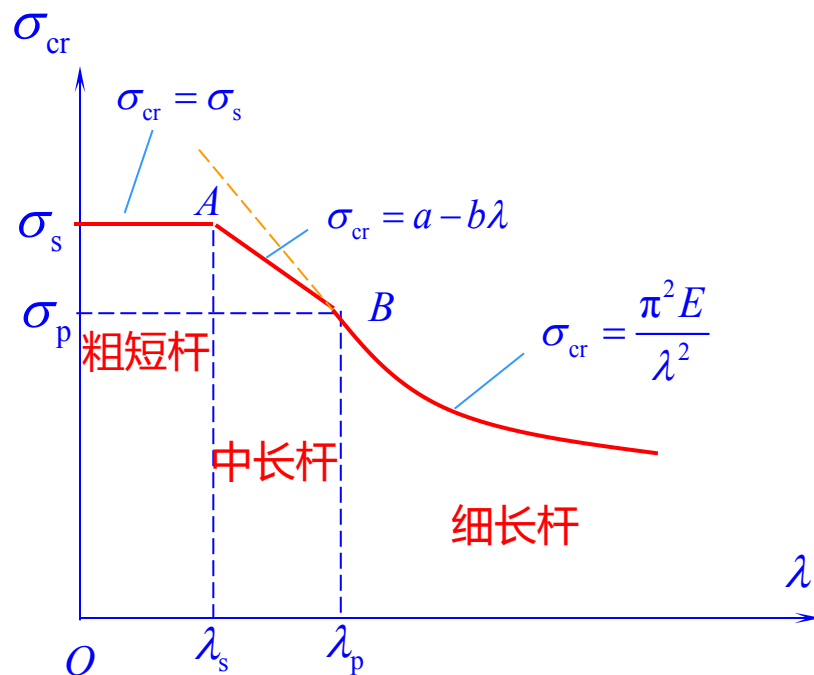
采用什么量才能确定压杆的类型？

这是计算压杆临界力的关键问题！！！！



三类压杆长细比极限值的确定

根据临界应力总图中所示之关系，可以确定区分不同材料三类压杆的长细比极限值。



令细长杆的临界应力等于材料的比例极限(图中的B点)，有

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_p$$

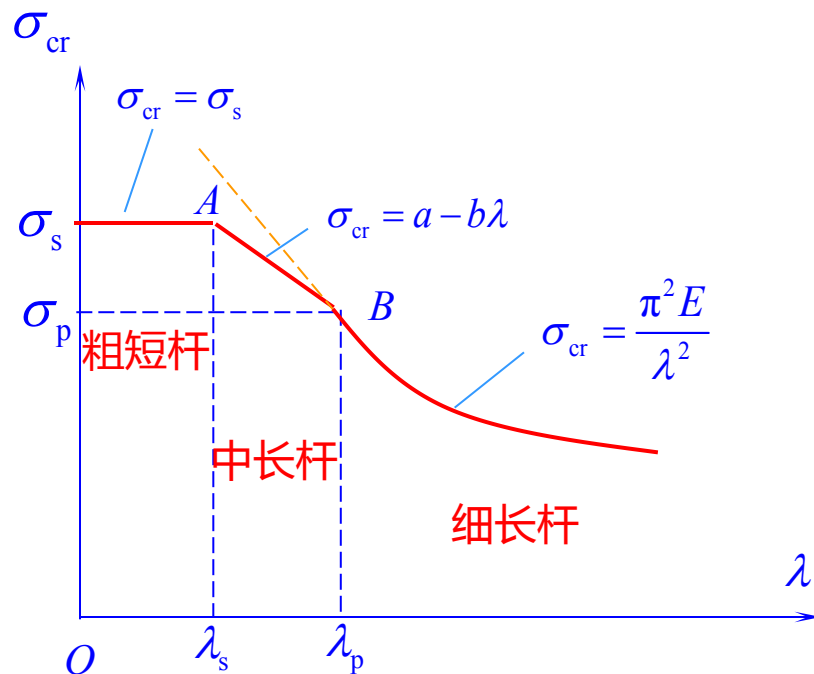
由此得到

$$\lambda_p = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}}$$



三类压杆长细比极限值的确定

根据临界应力总图中所示之关系，可以确定区分不同材料三类压杆的长细比极限值。



若令中长杆的临界应力等于屈服强度(图中的A点)，得到

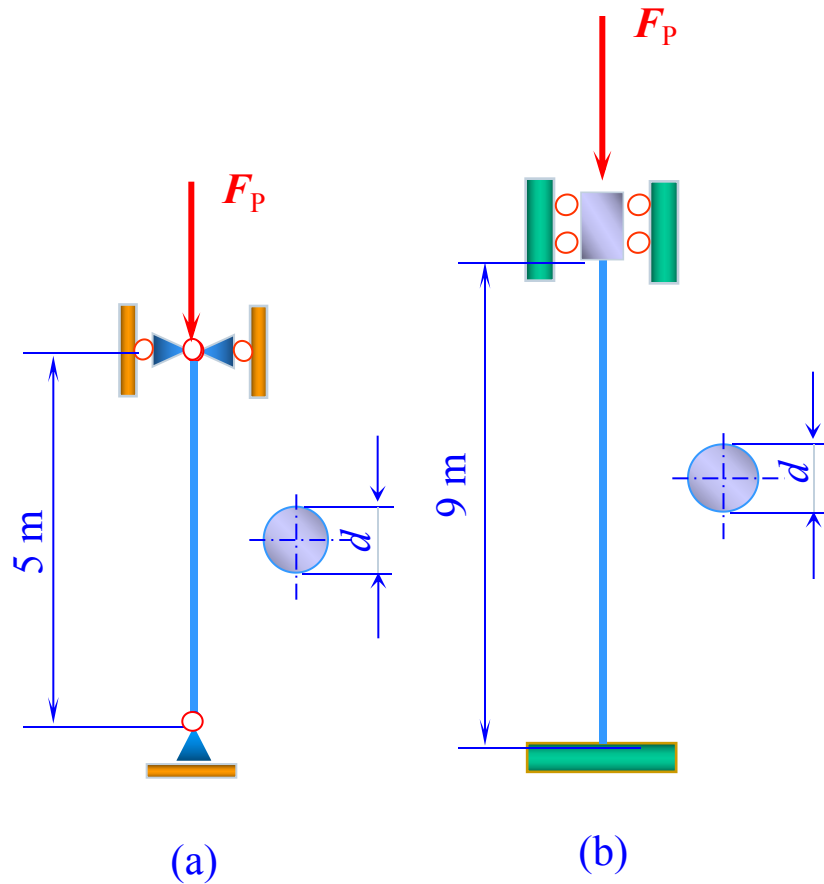
$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = \sigma_s$$

由此得到

$$\lambda_s = \frac{a - \sigma_s}{b}$$



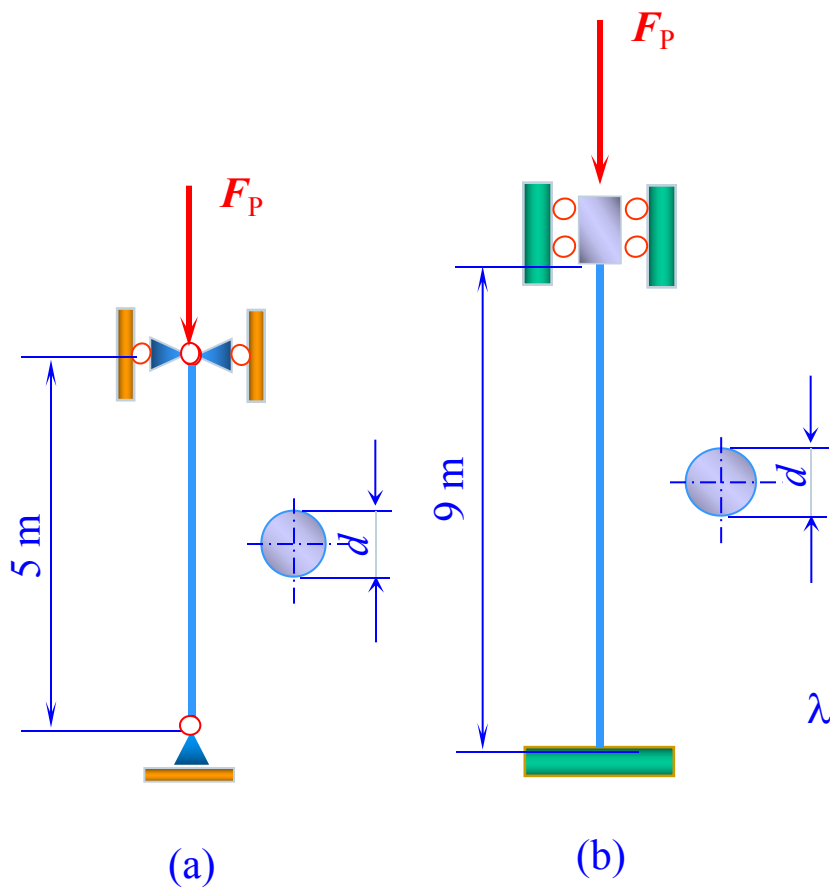
能力训练 1



两根直径均为 d 的压杆，材料都是Q235钢，但二者长度和约束条件各不相同。试；

1. 分析：哪一根压杆的临界载荷比较大？

2. 已知： $d=160$ mm， $E=206$ GPa。求：两根杆的临界载荷。



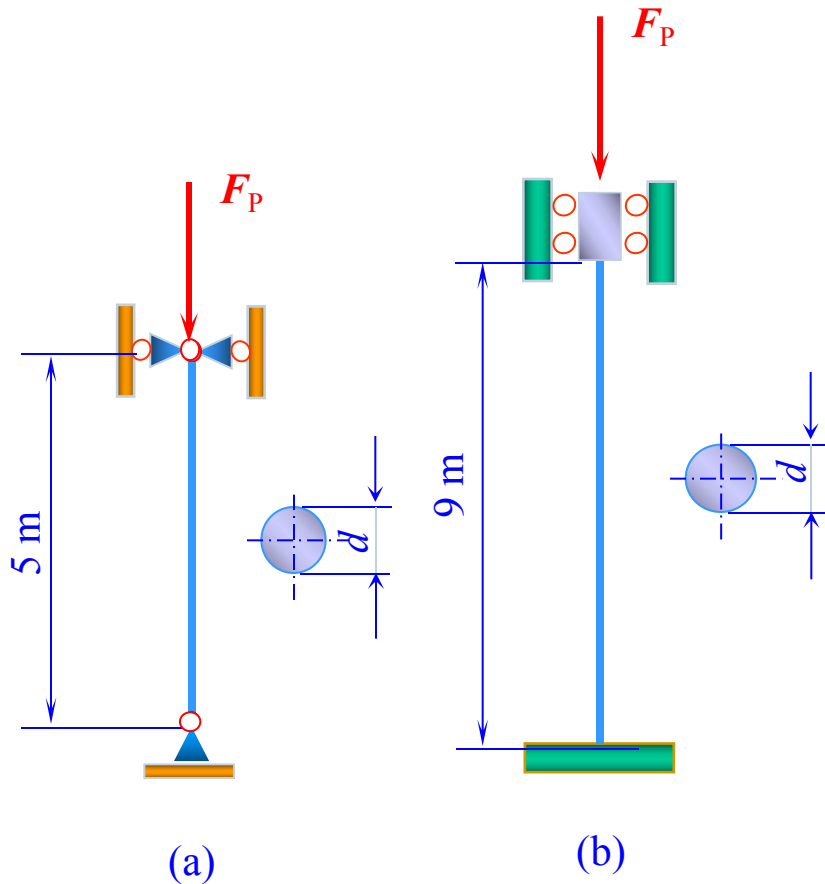
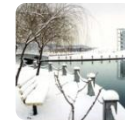
1. 分析两根压杆的临界载荷

从临界应力总图可以看出，对于材料相同的压杆，长细比越大，临界载荷越小。所以判断哪一根压杆的临界载荷大，必须首先计算压杆的长细比，长细比小者，临界载荷大。

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d}{4}$$

$$\lambda_a = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \times 5\text{m}}{\frac{d}{4}} = \frac{20\text{m}}{d} \quad \lambda_b = \frac{\mu l}{i} = \frac{0.5 \times 9\text{m}}{\frac{d}{4}} = \frac{18\text{m}}{d}$$

$$F_{\text{Per}}(a) < F_{\text{Per}}(b)$$



2. 已知: $d=160\text{ mm}$, Q235钢, $E=206\text{ GPa}$, 确定两根杆的临界载荷

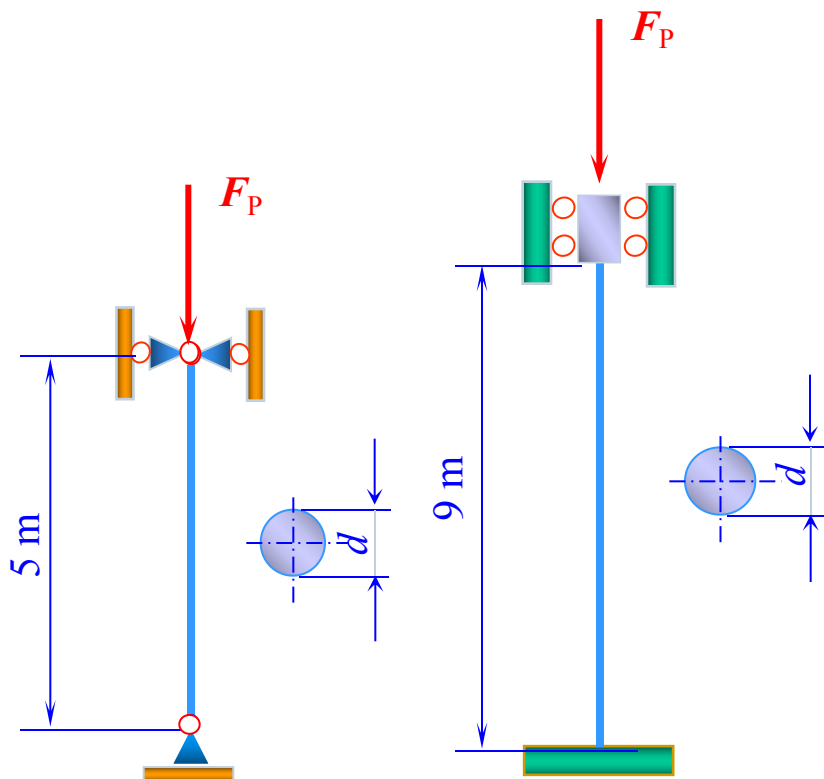
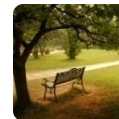
首先计算长细比, 判断属于哪一类压杆:

$$\lambda_a = \frac{20}{d} = \frac{20\text{m}}{0.16\text{m}} = 125$$

$$\lambda_b = \frac{18}{d} = \frac{18\text{m}}{0.16\text{m}} = 112.5$$

Q235钢 $\lambda_p=101$

二者都属于细长杆, 都可以采用欧拉公式。



2.已知: $d=160\text{ mm}$, Q235钢,
 $E=206\text{ GPa}$, 确定两根杆的临界载荷

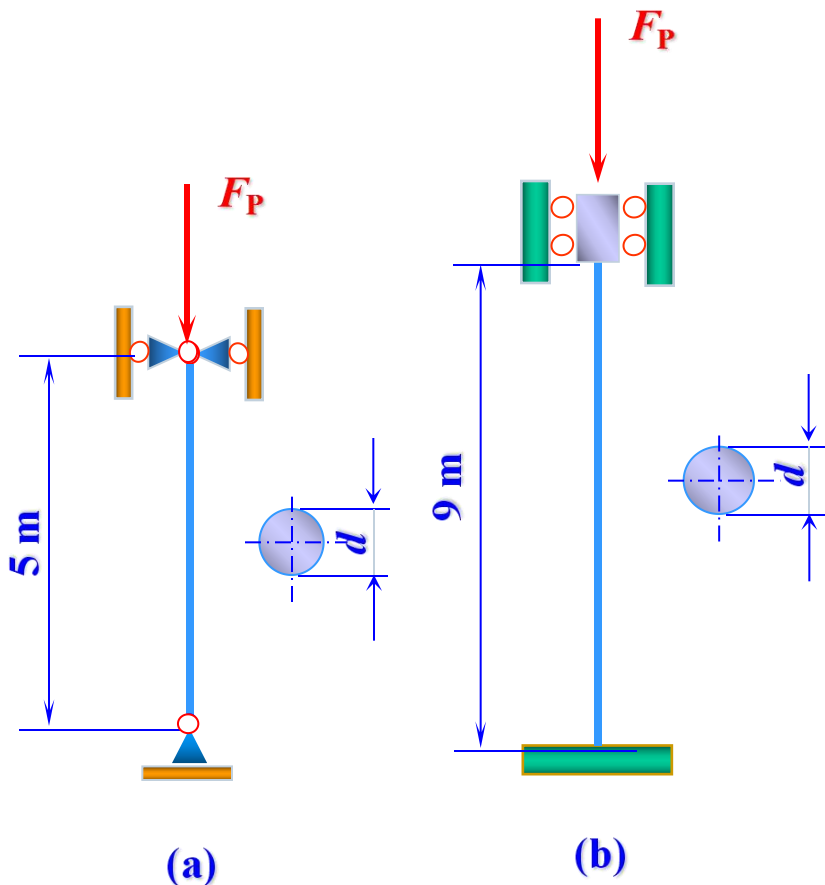
对于Q235钢, $\lambda_p=101$, 二者都属于细长杆, 都可以采用欧拉公式。

对于两端铰支的压杆, 就有

(a)

$$F_{Pcr} = \sigma_{cr} A = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \times \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi^2 \times 206\text{GPa} \times 10^9}{125^2} \times \frac{\pi \times (160\text{mm} \times 10^{-3})^2}{4}$$

$$= 2.6 \times 10^6 \text{ N} = 2.60 \times 10^3 \text{ kN}$$



2.已知： $d=160\text{ mm}$ ，Q235钢， $E=206\text{ GPa}$ ，确定两根杆的临界载荷

对于Q235钢， $\lambda_p=101$ ，二者都属于细长杆，都可以采用欧拉公式。

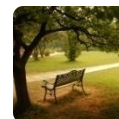
对于两端固定的压杆，就有

$$F_{Pcr} = \sigma_{cr} A = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \times \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi^2 \times 206\text{ GPa} \times 10^9}{112.5^2} \times \frac{\pi \times (160\text{ mm} \times 10^{-3})^2}{4}$$

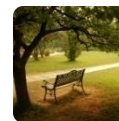
$$= 3.21 \times 10^6 \text{ N} = 3.21 \times 10^3 \text{ kN}$$



■ 压杆稳定性设计的安全因数法



- ★ 稳定性设计内容
- ★ 安全因数法与稳定性安全条件
- ★ 稳定性设计过程



稳定性设计内容

稳定性设计 (stability design) 一般包括:

确定临界载荷

当压杆的材料、约束以及几何尺寸已知时，根据三类不同压杆的临界应力公式，确定压杆的临界载荷。

稳定性安全校核

当外加载荷、杆件各部分尺寸、约束以及材料性能均为已知时，验证压杆是否满足稳定性设计准则。



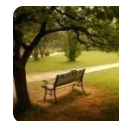
安全因数法与稳定性安全条件

为了保证压杆具有足够的稳定性，在设计中必须使杆件所承受的实际压缩载荷（又称为工作载荷）小于杆件的临界载荷，并且具有一定的安全裕度。

压杆的稳定性设计一般采用安全因数法与折减系数法。本书只介绍安全因数法。

采用安全因数法时，稳定性安全条件一般可表示为

$$n_w \geq [n]_{st}$$



安全因数法与稳定性安全条件

$$n_w \geq [n]_{st}$$

$$n_w = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_w} = \frac{F_{Pcr}}{F_P}$$

工作安全因数

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{Pcr}}{A}$$

临界应力

$$\sigma_w = \frac{F_w}{A}$$

工作应力

$$[n]_{st}$$

规定安全因数



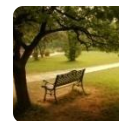
稳定性设计过程

根据上述设计准则，进行压杆的稳定性设计时，首先必须根据材料的弹性模量与比例极限 E 、 σ_p ，计算出长细比的极限值 λ_p 和 λ_s ，再根据压杆的长度 l 、横截面的惯性矩 I 和面积 A ，以及两端的支承条件 μ ，计算压杆的实际长细比 λ 。

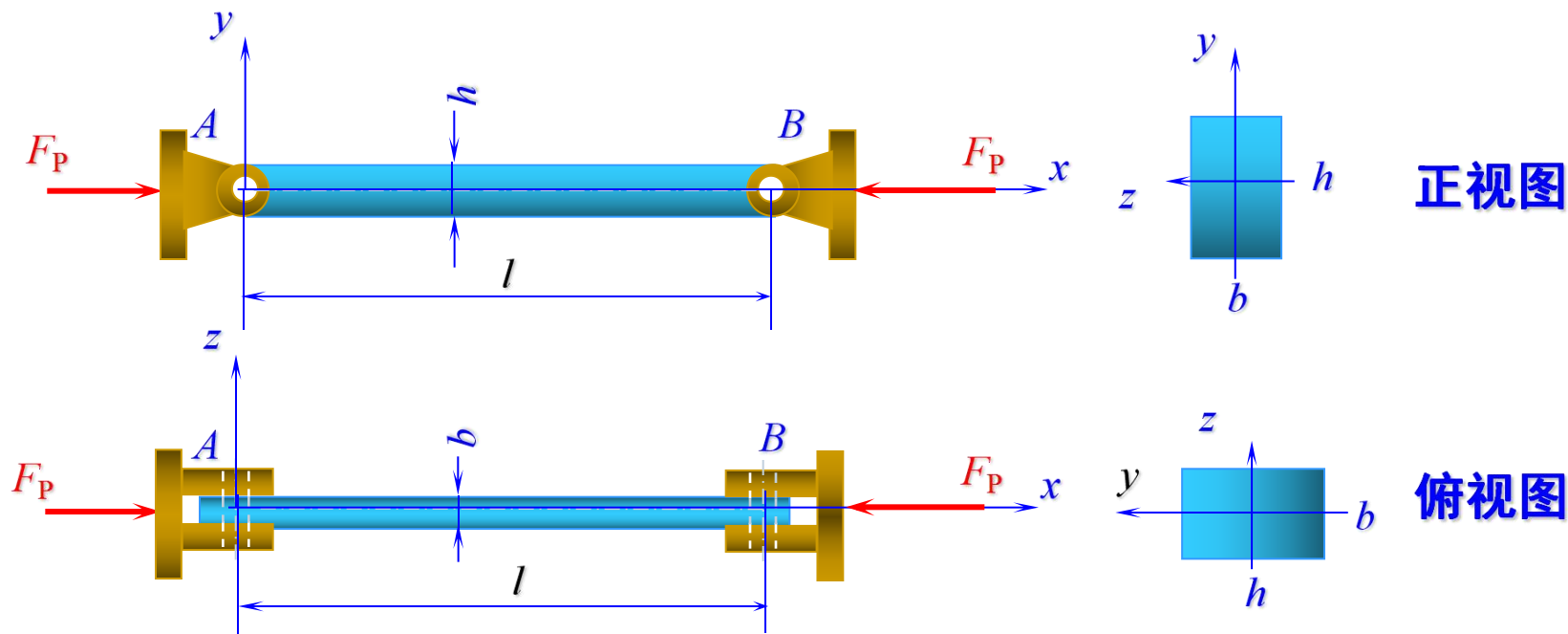
然后比较压杆的实际长细比值与极限值，判断属于哪一类压杆，选择合适的临界应力公式，确定临界载荷。

最后，计算压杆的工作安全因数，并验算是否满足稳定性设计准则。

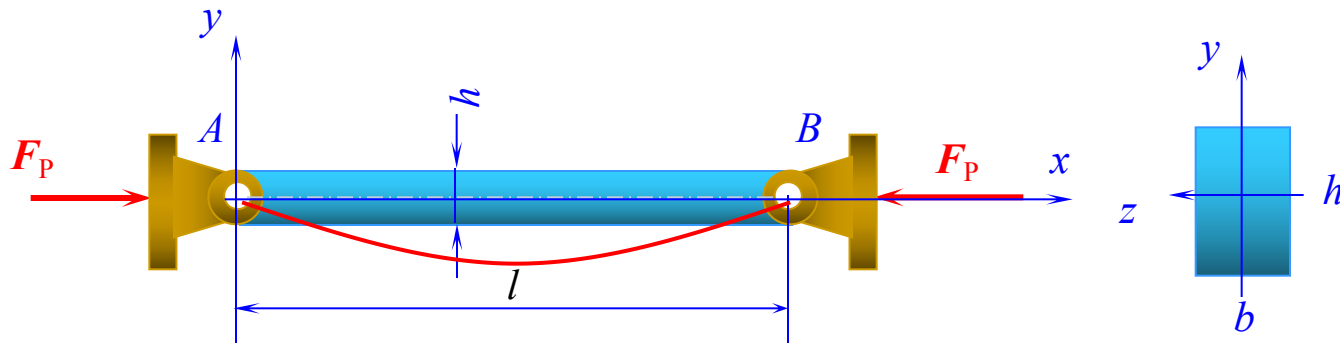
对于简单结构，则需应用受力分析方法，首先确定哪些杆件承受压缩载荷，然后再按上述过程进行稳定性计算与设计。



能力训练 2



已知: $b=40\text{ mm}$, $h=60\text{ mm}$, $l=2300\text{ mm}$, Q235钢 $E=205\text{ GPa}$, $F_P=150\text{ kN}$, $[n]_{st}=1.8$
校核: 稳定性是否安全?

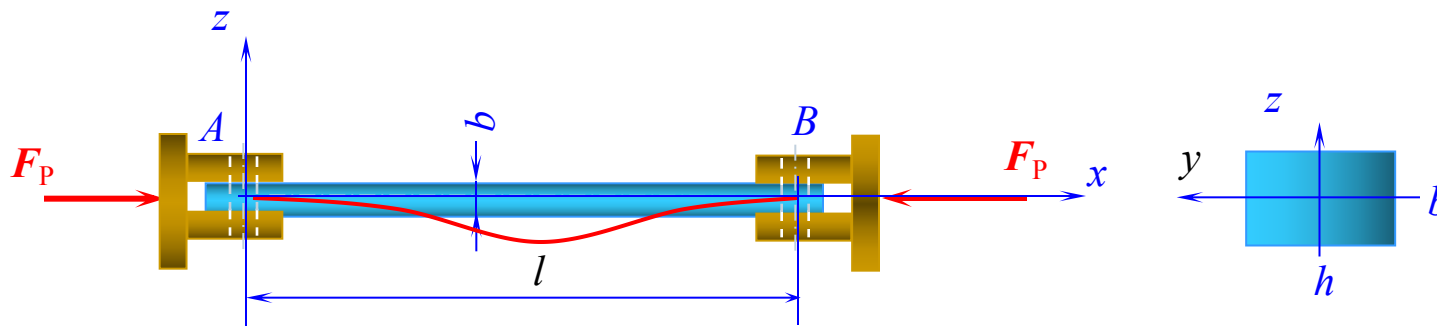
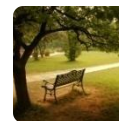


解：压杆在正视图平面(x-y平面)内，两端约束为铰支,屈曲时横截面将绕z轴转动：

$$\mu_z=1, \quad \lambda_z=\mu_z l / i_z, \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$$

$$I_z=bh^3/12 \quad A=bh$$

$$\lambda_z=132.6$$



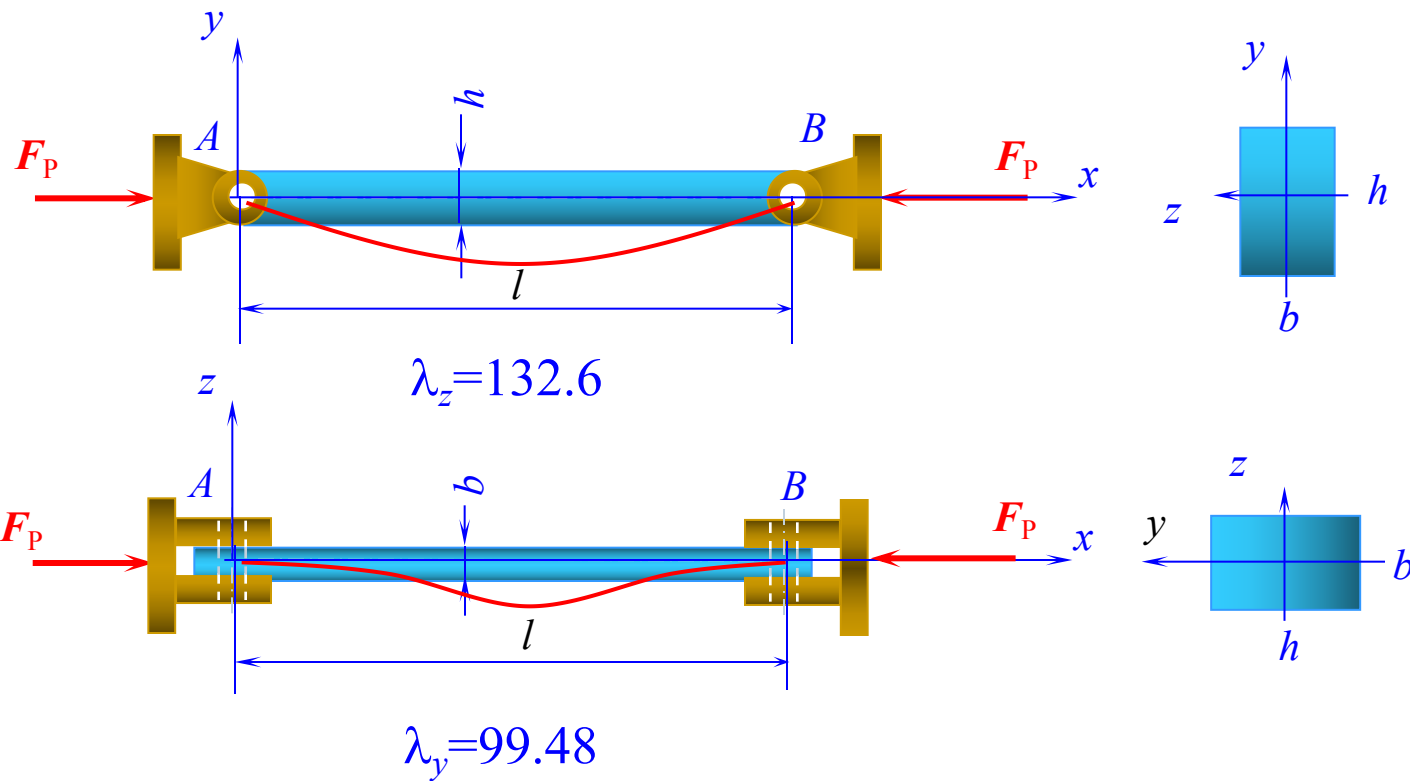
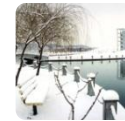
压杆在俯视图平面(x - z 平面)内, 两端约束为固定端, 屈曲时横截面将绕 y 轴转动:

$$\mu_y = 0.5, \quad \lambda_y = \mu_y l / i_y, \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$I_y = hb^3/12 \quad A = bh$$

$$\lambda_y = 99.48$$

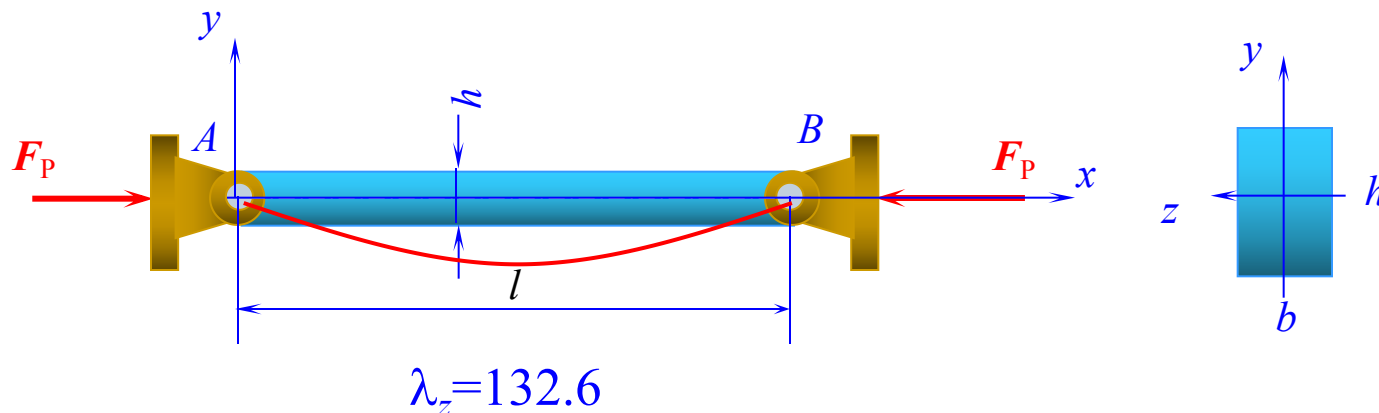
因此, 压杆将在正视图平面内屈曲。



因此，压杆将在正视图平面(x - y 平面)内屈曲。



因此，压杆将在正视图平面(x - y 平面)内屈曲。



$$F_{Pcr}(z) = \sigma_{cr} A = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \times (b \times h) = 276.2 \text{ kN}$$

工作安全因数为

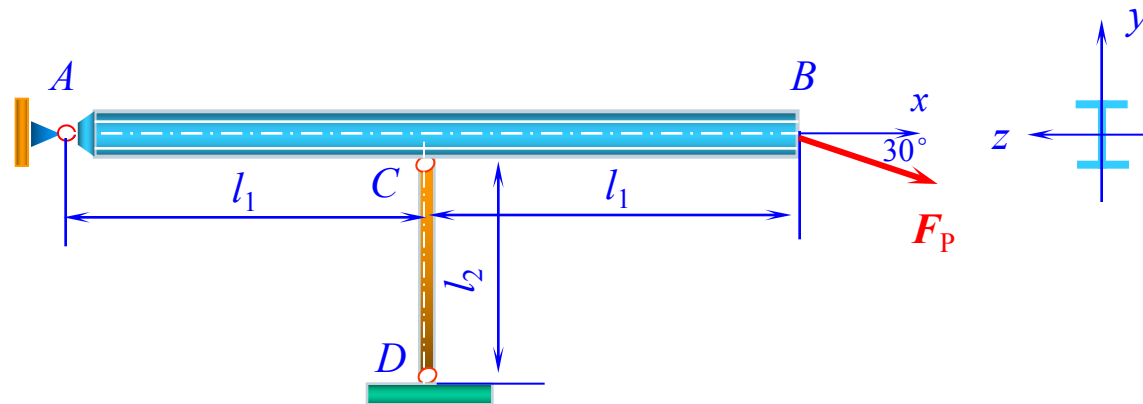
$$n_w = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{wr}} = \frac{F_{Pcr}}{F_P} = \frac{276.2}{150} = 1.834$$

$$n_w > [n]_{st} = 1.8$$

因此，压杆的稳定性是安全的。

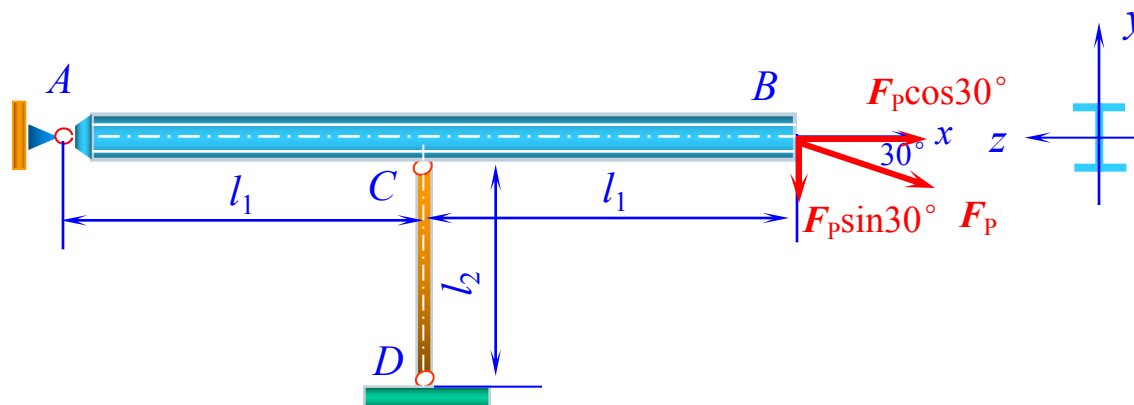
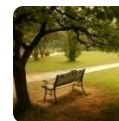


能力训练 4



已知：在如图所示的结构中，梁 AB 为No.14普通热轧工字钢， CD 为圆截面直杆，其直径为 $d=20\text{ mm}$ ，二者材料均为Q235钢。结构受力如图所示， A 、 C 、 D 三处均为球铰约束。若已知 $F_P=25\text{ kN}$ ， $l_1=1.25\text{ m}$ ， $l_2=0.55\text{ m}$ ， $\sigma_s=235\text{ MPa}$ 。强度安全因数 $n_s=1.45$ ，稳定安全因数 $[n]_{st}=1.8$ 。

校核：此结构是否安全？



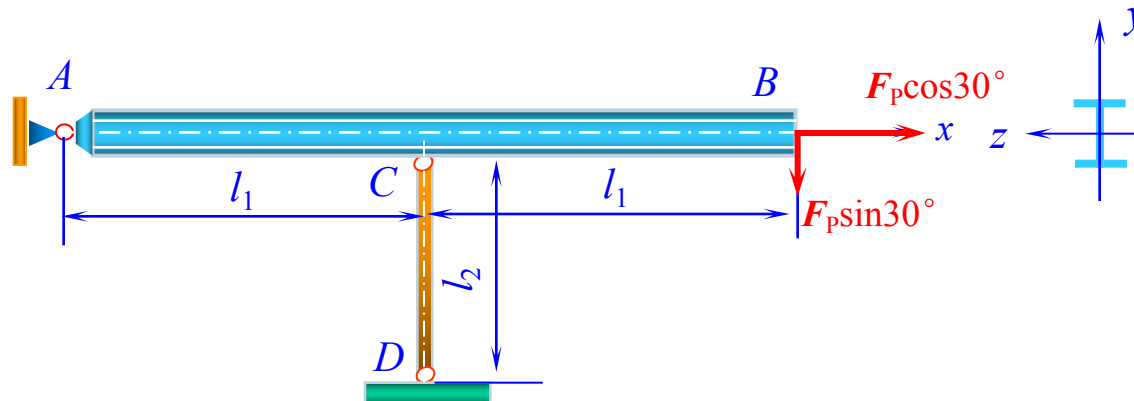
解：在给定的结构中共有两个构件：梁 AB ，承受拉伸与弯曲的组合作用，属于强度问题；杆 CD 承受压缩载荷，属于稳定问题。

1. 大梁 AB 的强度校核

大梁 AB 在截面 C 处弯矩最大，该处横截面为危险截面，其上的弯矩和轴力分别为

$$M_{\max} = (F \sin 30^\circ) l_1 = (25 \text{ kN} \times 10^3 \times 0.5) \times 1.25 \text{ m} = 15.63 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_N = F_p \cos 30^\circ = 25 \text{ kN} \times 10^3 \times \cos 30^\circ = 21.65 \text{ kN}$$



解：1. 大梁AB的强度校核

$$M_{\max} = (F_p \sin 30^\circ) l_1 = (25 \text{ kN} \times 10^3 \times 0.5) \times 1.25 \text{ m} = 15.63 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

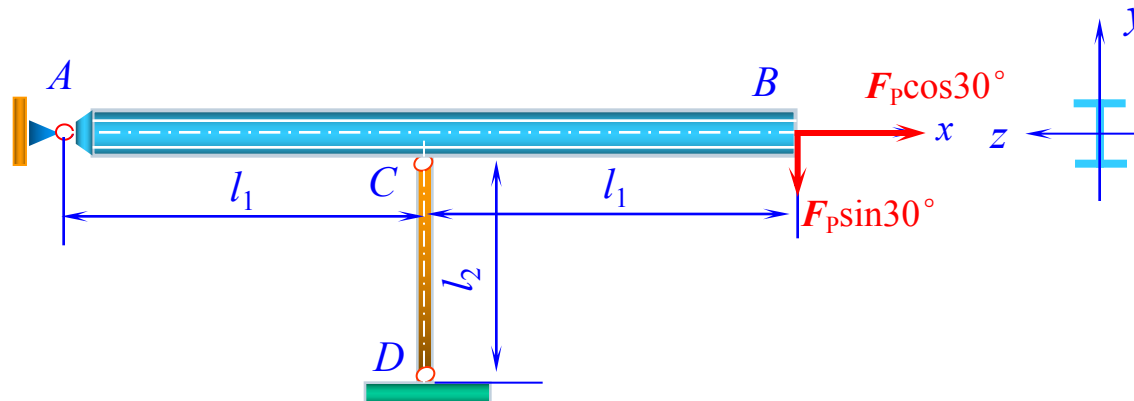
$$F_N = F_p \cos 30^\circ = 25 \text{ kN} \times 10^3 \times \cos 30^\circ = 21.65 \text{ kN}$$

由型钢表查得No.14普通热轧工字钢的参数为

$$W_z = 102 \text{ cm}^3 = 102 \times 10^3 \text{ mm}^3; \quad A = 21.5 \text{ cm}^2 = 21.5 \times 10^2 \text{ mm}^2$$

由此得到梁内最大应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} + \frac{F_N}{A} = \frac{15.63 \text{ N} \cdot \text{m} \times 10^3}{102 \times 10^3 \text{ mm}^3 \times 10^{-9}} + \frac{21.65 \text{ N} \times 10^3}{21.5 \times 10^2 \text{ mm}^2 \times 10^{-4}}$$



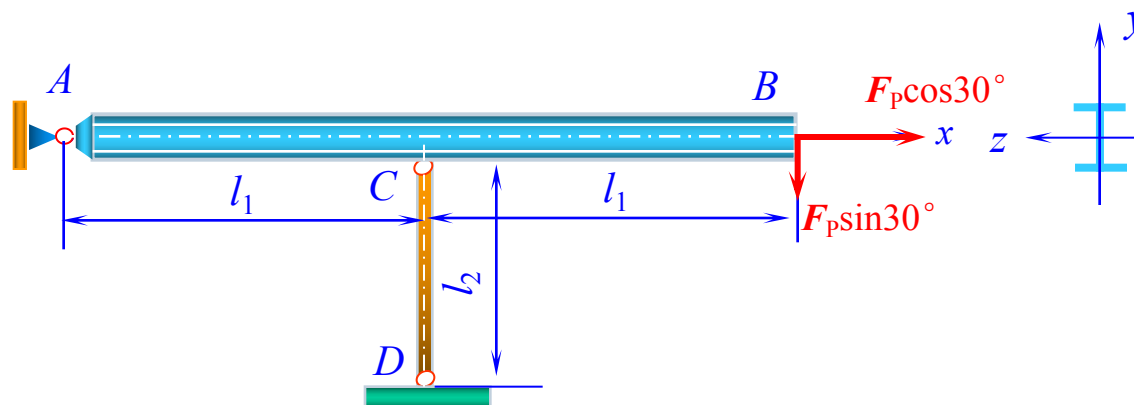
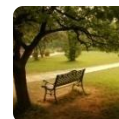
解：1. 大梁AB的强度校核

$$M_{\max} = (F_p \sin 30^\circ) l_1 = (25 \text{ kN} \times 10^3 \times 0.5) \times 1.25 \text{ m} = 15.63 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$F_N = F_p \cos 30^\circ = 25 \text{ kN} \times 10^3 \times \cos 30^\circ = 21.65 \text{ kN}$$

由此得到梁内最大应力

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M_{\max}}{W_z} + \frac{F_N}{A} = \frac{15.63 \text{ N} \cdot \text{m} \times 10^3}{102 \times 10^3 \text{ mm}^3 \times 10^{-9}} + \frac{21.65 \text{ N} \times 10^3}{21.5 \times 10^2 \text{ mm}^2 \times 10^{-4}} \\ &= 163.2 \times 10^6 \text{ Pa} = 163.2 \text{ MPa} \end{aligned}$$



解：1. 大梁AB的强度校核

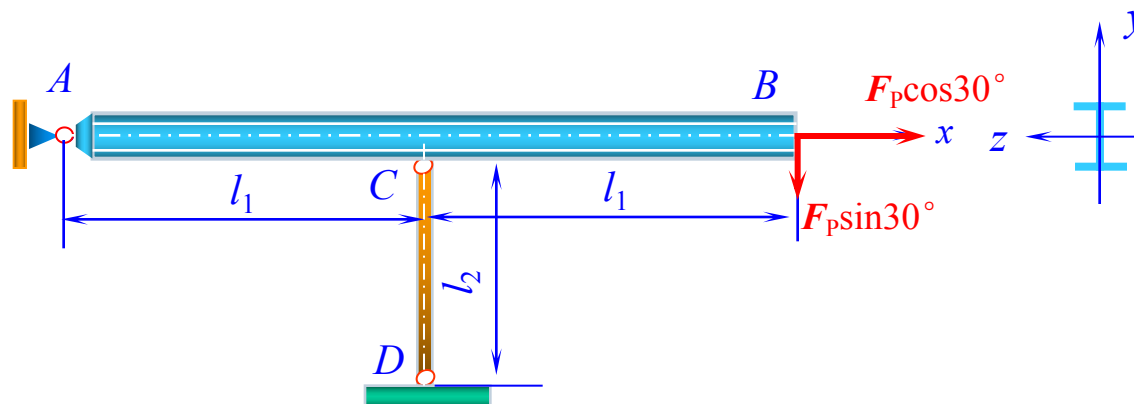
由此得到梁内最大应力

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} + \frac{F_N}{A} = 163.2 \text{ MPa}$$

梁的工作安全因数

$$n_w = \frac{\sigma_s}{\sigma_{\max}} = \frac{235 \text{ MPa}}{163.2 \text{ MPa}} = 1.44$$

n_w 略小于 $[n]_s$, 但 $([n]_s - n_w) \times 100\% / [n]_s = 0.7\% < 5\%$ 。这在工程上仍认为是安全的。



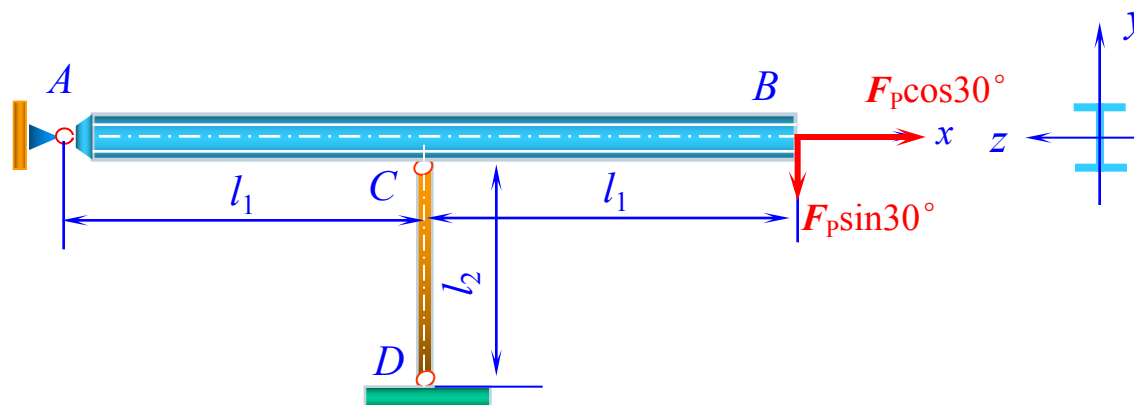
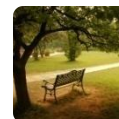
解：2. 校核压杆CD的稳定性

由平衡方程求得压杆CD的轴向压力

$$F_{NCD} = 2F_p \sin 30^\circ = F_p = 25\text{kN}$$

因为是圆截面杆,故惯性半径

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d}{4} = 5 \text{ mm}$$



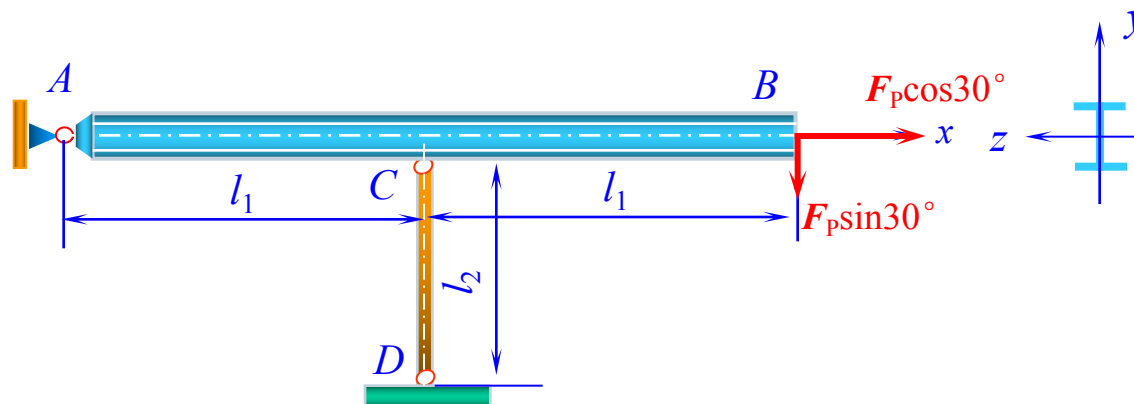
解：2. 校核压杆CD的稳定性

$$F_{NCD} = 2F_p \sin 30^\circ = F_p = 25\text{kN} \quad i = \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{d}{4} = 5 \text{ mm}$$

又因为两端为球铰约束， $\mu=1.0$ ，所以

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1.0 \times 0.55\text{m}}{5 \times 10^{-3} \text{m}} = 110 > \lambda_p = 101$$

这表明，压杆CD为细长杆，故需采用欧拉公式计算其临界应力。

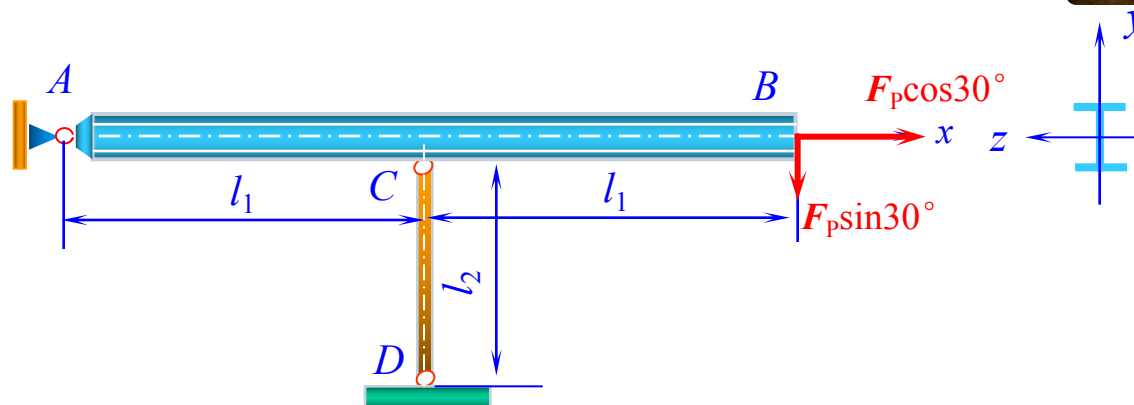
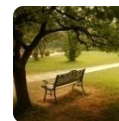


解：2. 校核压杆CD的稳定性

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1.0 \times 0.55 \text{ m}}{5 \times 10^{-3} \text{ m}} = 110 > \lambda_p = 101$$

这表明，压杆CD为细长杆，故需采用欧拉公式计算其临界应力。

$$\begin{aligned} F_{\text{Per}} &= \sigma_{\text{cr}} A = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \times \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi^2 \times 206 \text{ GPa} \times 10^9}{110^2} \times \frac{\pi \times (20 \text{ mm} \times 10^{-3})^2}{4} \\ &= 52.8 \times 10^3 \text{ N} = 52.8 \text{ kN} \end{aligned}$$



解：2. 校核压杆CD的稳定性

$$F_{NCD} = 2F_p \sin 30^\circ = F_p = 25\text{kN}$$

$$F_{Pcr} = \sigma_{cr} A = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \times \frac{\pi d^2}{4} = 52.8 \text{ kN}$$

于是，压杆的工作安全因数

$$n_w = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_w} = \frac{F_{Pcr}}{F_{NCD}} = \frac{52.8\text{kN}}{25\text{kN}} = 2.11 > [n]_{st} = 1.8$$

这一结果说明，压杆的稳定性是安全的。

上述两项计算结果表明，整个结构的强度和稳定性都是安全的。



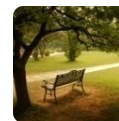
■ 深度研讨



- ★ 稳定设计重要性的再讨论
- ★ 影响压杆承载能力的因素
- ★ 正确应用欧拉公式
- ★ 研讨问题



★ 稳定设计重要性的再讨论



由于受压杆的失稳而使整个结构发生坍塌，不仅会造成物质上的巨大损失，而且还危及人民的生命安全。在19世纪末，瑞士的一座铁桥，当一辆客车通过时，桥梁桁架中的压杆失稳，致使桥梁发生灾难性坍塌，大约有200人遇难。加拿大和俄国的一些铁路桥梁也曾经由于压杆失稳而造成灾难性事故。

虽然科学家和工程师早就针对这类灾害进行了大量的研究，采取了很多预防措施，但直到现在还不能完全制止这种灾害的发生。



1983年10月4日，北京的一幢正在施工的高层建筑的高54.2m、长17.25m、总重565.4kN的大型脚手架屈曲坍塌，造成5人死亡，7人受伤。

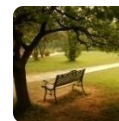
- 地面未夯实，局部杆受力大；
- 横杆之间的距离 $2.2\text{m} >$ 规定值 1.7m ；
- 与墙体连接点太少；
- 安全因数太低： $1.11 \sim 1.75 <$ 规定值 3.0 。



“Such failures can be catastrophic and lead to a large loss of life as well as major economic loss”.



★ 影响压杆承载能力的因素

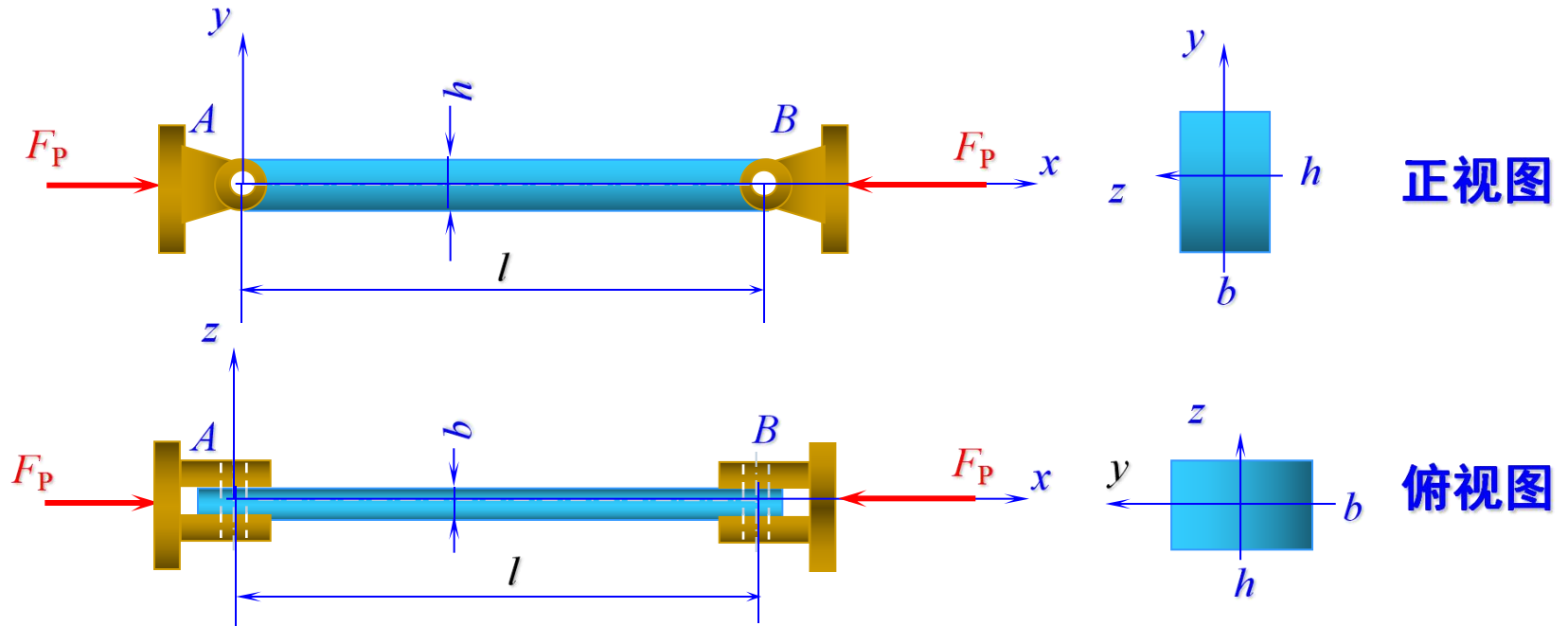


影响压杆稳定承载能力的因素不同于影响强度的因素

一般情形下，控制构件强度的因素主要是个别危险截面上的内力、危险面的几何形状和尺寸。

而压杆丧失稳定，由直线平衡构形转变为弯曲平衡构形，这一过程不是某个截面或某几个截面的行为，而是压杆的一种整体行为。

与梁的位移形成过程相似，压杆的屈曲过程是压杆所有横截面弯曲变形的累加结果。所以，个别截面的削弱对于压杆临界载荷的数值影响不大。

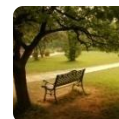




对于细长杆，其临界载荷为

$$F_{\text{Pcr}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

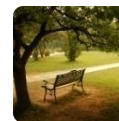
所以，影响承载能力的因素较多。临界载荷不仅与材料的弹性模量 E 有关，而且与长细比有关。长细比包含了截面形状、几何尺寸以及约束条件等多种因素。



对于**中长杆**，临界载荷为

$$F_{\text{Pcr}} = \sigma_{\text{cr}} A = (a - b\lambda) A$$

因而影响其承载能力的主要是材料常数 a 和 b ，以及压杆的长细比，当然还有压杆的横截面积。



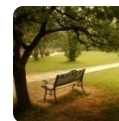
对于**粗短杆**,因为不发生屈曲,而只发生屈服或破坏,故有

$$F_{\text{Pcr}} = \sigma_{\text{cr}} A = \sigma_{\text{s}} A$$

因而临界载荷主要取决于材料的屈服强度和杆件的横截面积。



★ 正确应用欧拉公式



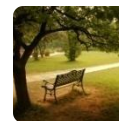
首先，只有细长杆才能应用欧拉公式计算其临界载荷。所谓细长杆，不能只看压杆的长度，而要综合考虑长度、约束性质以及截面的惯性矩。也就是要根据长细比和材料的性能判断是不是细长杆。

其次，要正确确定横截面的惯性矩。为此，必须判断屈曲时，压杆的横截面将绕哪一根惯性主轴转动。

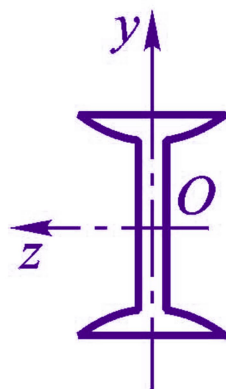


$$F_{\text{Pcr}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}$$

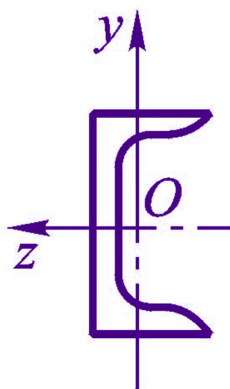
I 如何确定？



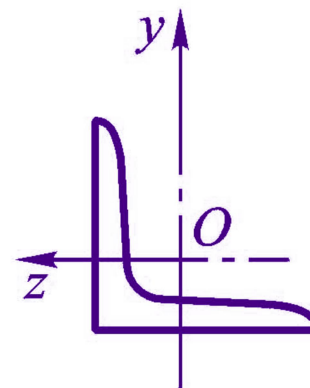
两端球铰约束的压杆，横截面有如下不同形式，
请分析确定临界应力时，惯性矩 I 应该怎样确定？



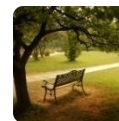
(a)



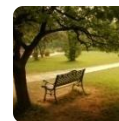
(b)



(c)



★ 稳定设计中需要注意的几个重要问题

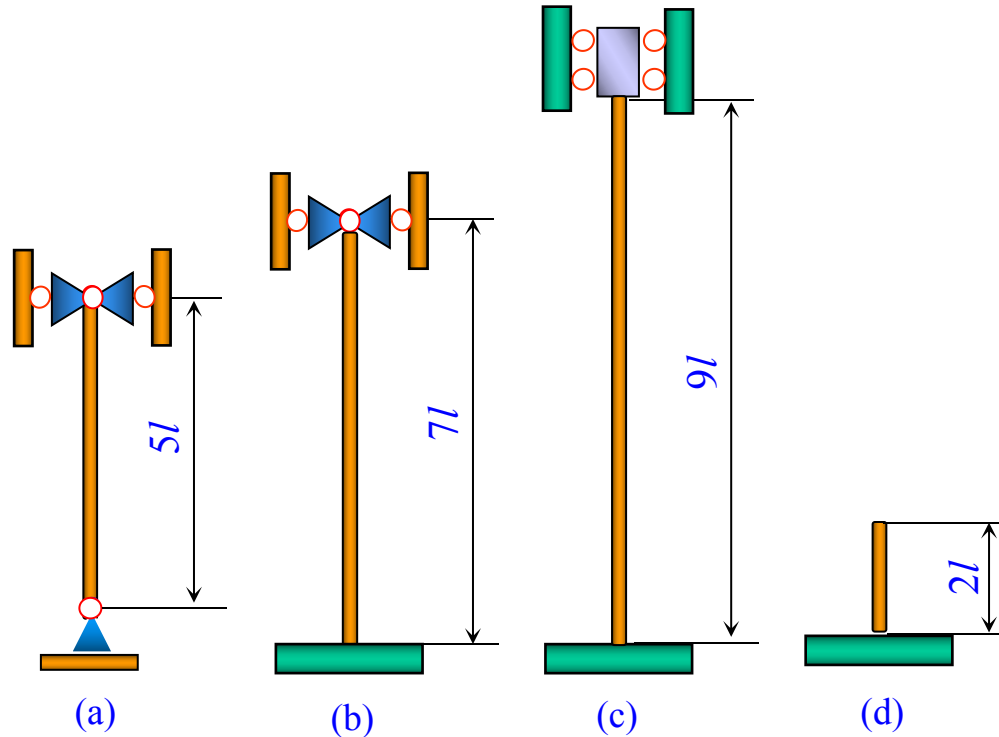


需要特别指出的是：屈曲失效与强度失效有着本质上的差异，前者失效时的载荷远低于后者，而且往往是突发性的，因而常常造成灾难性后果。因此，在工程设计中要特别予以关注：

■ 首先，要正确进行受力分析，判断哪些构件受压；对于受压杆，特别是细长压杆，必然存在稳定性问题。

■ 其次，要根据约束性质，以及截面的几何形状和尺寸，确定压杆的长细比。

■ 然后，要根据长细比的大小，正确区分三类不同压杆，分别采用相应的公式计算其临界载荷。



**四根压杆：材料和直径相同，但是长度和支承都不相同。
请应用临界应力总图排出它们临界力大小的顺序。**

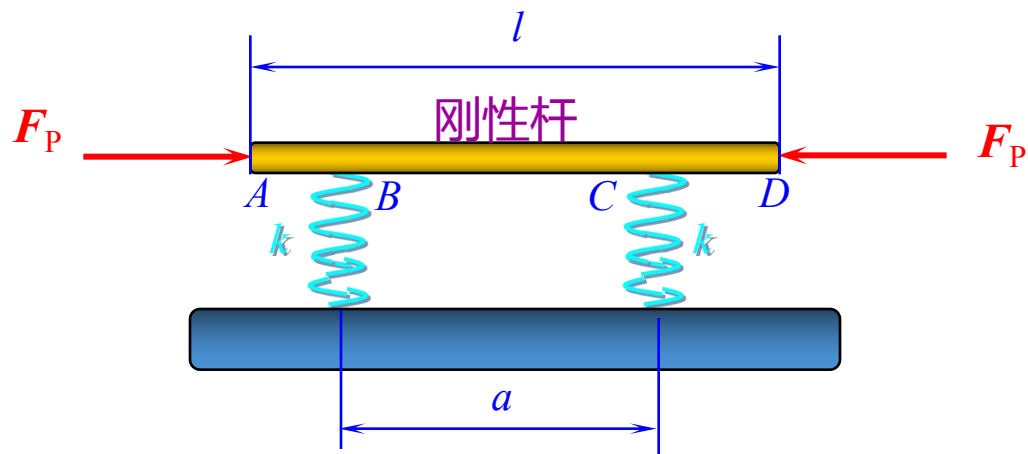


★ 研讨问题



研讨问题1

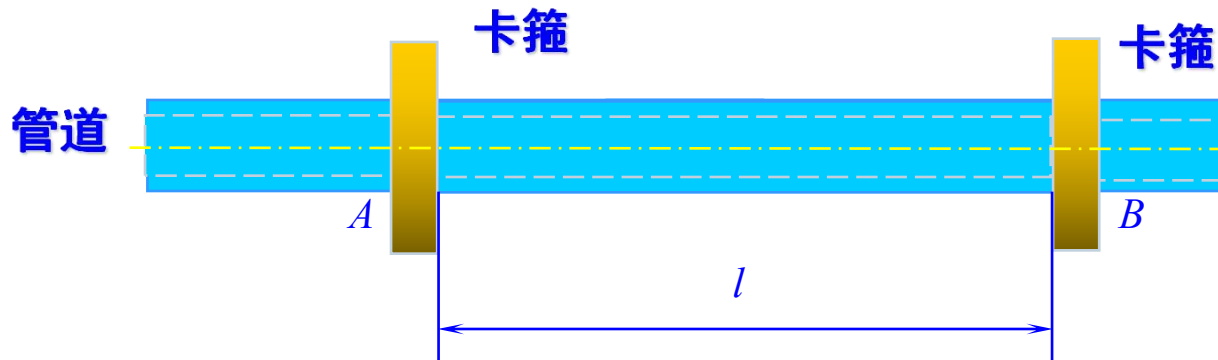
刚性杆 $ABCD$ 在 B 、 C 二处支承在刚度为 k 的弹簧上；弹簧下端固接在刚性地面上。刚性杆承受一对轴向载荷如图中所示。



请分析该结构有没有稳定性问题？如果有，请确定保持稳定性的临界力的大小。

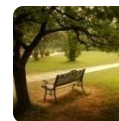


研讨问题 2



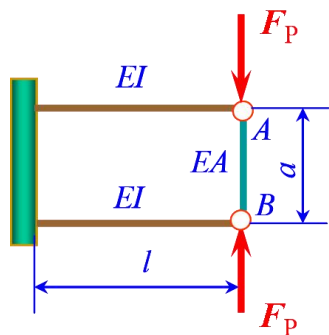
供热管道分段用“卡箍”固定在建筑物上，由于运行温度高于安装温度，在相邻的两个“卡箍”之间的一段管道可能会发生屈曲问题。

请分析：影响管道稳定承载能力（温差）的因素有哪些？
研究：可以采用哪些措施提高管道的稳定承载能力？

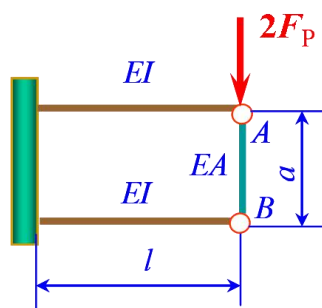


研讨问题 3

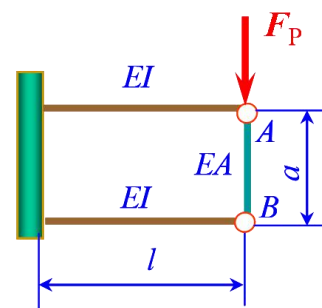
图所示几种结构中的杆 AB ，请分析哪一种情形下杆最容易发生屈曲失效？



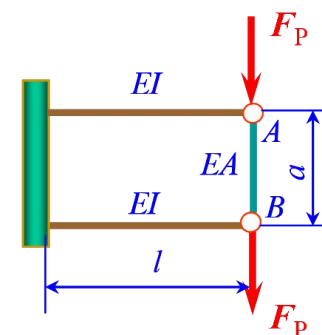
(a)



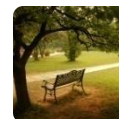
(b)



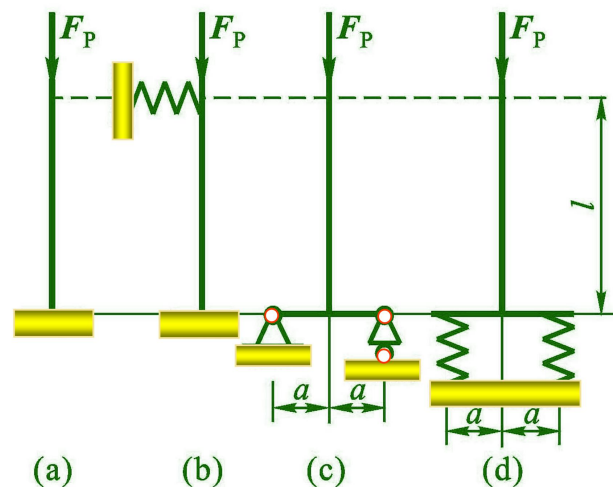
(c)



(d)



研讨问题 4



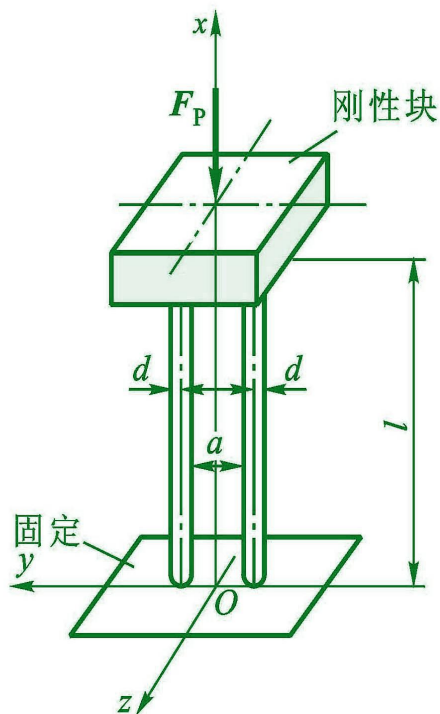
图中四杆均为圆截面直杆，杆长相同，且均为轴向加载，关于四者分叉载荷的大小，有四种解答，试判断哪一种是正确的（其中弹簧的刚度较大）。

- (A) $F_{Pcr} (a) < F_{Pcr} (b) < F_{Pcr} (c) < F_{Pcr} (d)$;
- (B) $F_{Pcr} (a) > F_{Pcr} (b) > F_{Pcr} (c) > F_{Pcr} (d)$;
- (C) $F_{Pcr} (b) > F_{Pcr} (c) > F_{Pcr} (d) > F_{Pcr} (a)$;
- (D) $F_{Pcr} (b) > F_{Pcr} (a) > F_{Pcr} (c) > F_{Pcr} (d)$ 。

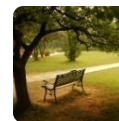


研讨问题 4

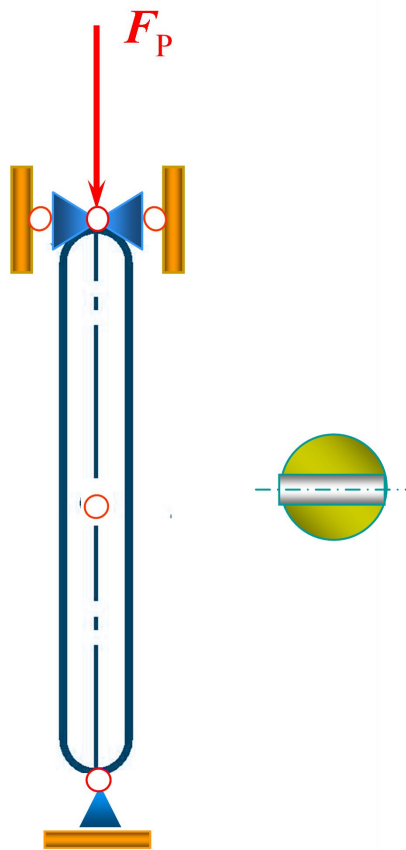
直径相同的两直杆下端固定、上端与刚性块固接，受力如图中所示。



分析：有几种屈曲可能？
每种情形下的欧拉临界应力
如何计算？



研讨问题 6



图示两端铰支的圆截面柱在距两端稍远处有一穿透圆孔。请就此例设计一个问题，并给出解答。



能力训练 I

9-I-2

9-I-4

9-I-6

9-I-8



再认知测试

9-1

9-7



谢谢大家