范钦珊 李　晨 李栋栋 孙　伟（特邀）

材料力学 Mechanics of Materials




2019-5-5

自主学习＋深度研讨

单元11 简单的静不定系统

(Unit 11 Simple statically indeterminate system)

开篇之说

位移分析中分别讨论了简单的拉压静不定问题、简单的扭转静不定问题和梁的静不定问题。所谓“简单”是指这些问题中只涉及单个杆件。

工程上更多的由两根以及两根以上的杆所组成的静不定系统。

我们现在所讨论的是简单的静不定系统，所谓“简单”，一是组成系统的杆件比较少；二是大多数载荷都作用在结构平面内。

自主学习从问题开始

静不定与静定结构的主要区别是什么？

怎样使静力学不可解的问题变成可解？关键点在哪里？

求解静不定系统与求解简单静不定杆件的方法的不同点在哪里？

未知力的个数等于平衡方程数，就一定是静定结构？

应用哪些概念和原理可以简化求解静不定问题？

- 静不定系统的几个基本概念
- 力法与正则方程
- 对称性与反对称性在求解静不定问题中的应用
- 空间静不定结构的特殊情形
- 深度研讨

■ 静不定系统的几个基本概念

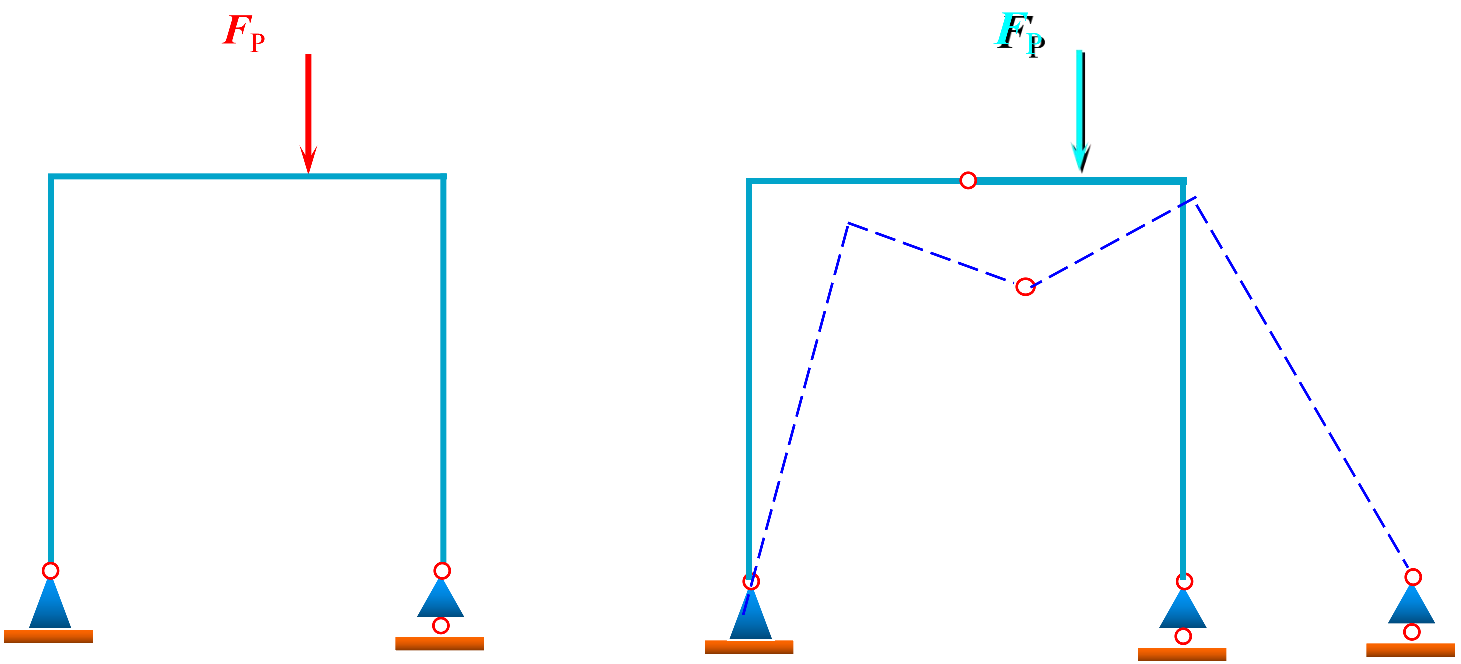


- ★ 外约束与内约束
- ★ 几种静不定结构
- ★ 静不定次数
- ★ 静定基本系统
- ★ 相当系统
- ★ 变形协调条件

★ 外约束与内约束

外约束 外约束——多余约束与非多余约束

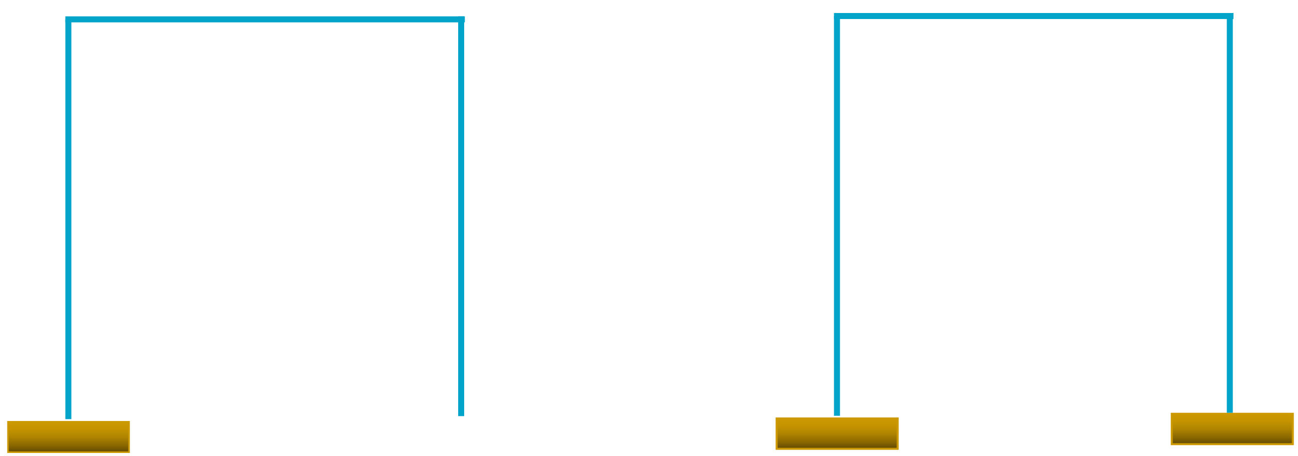
非多余约束——保持结构静定、几何不可变所必须的约束。



外约束

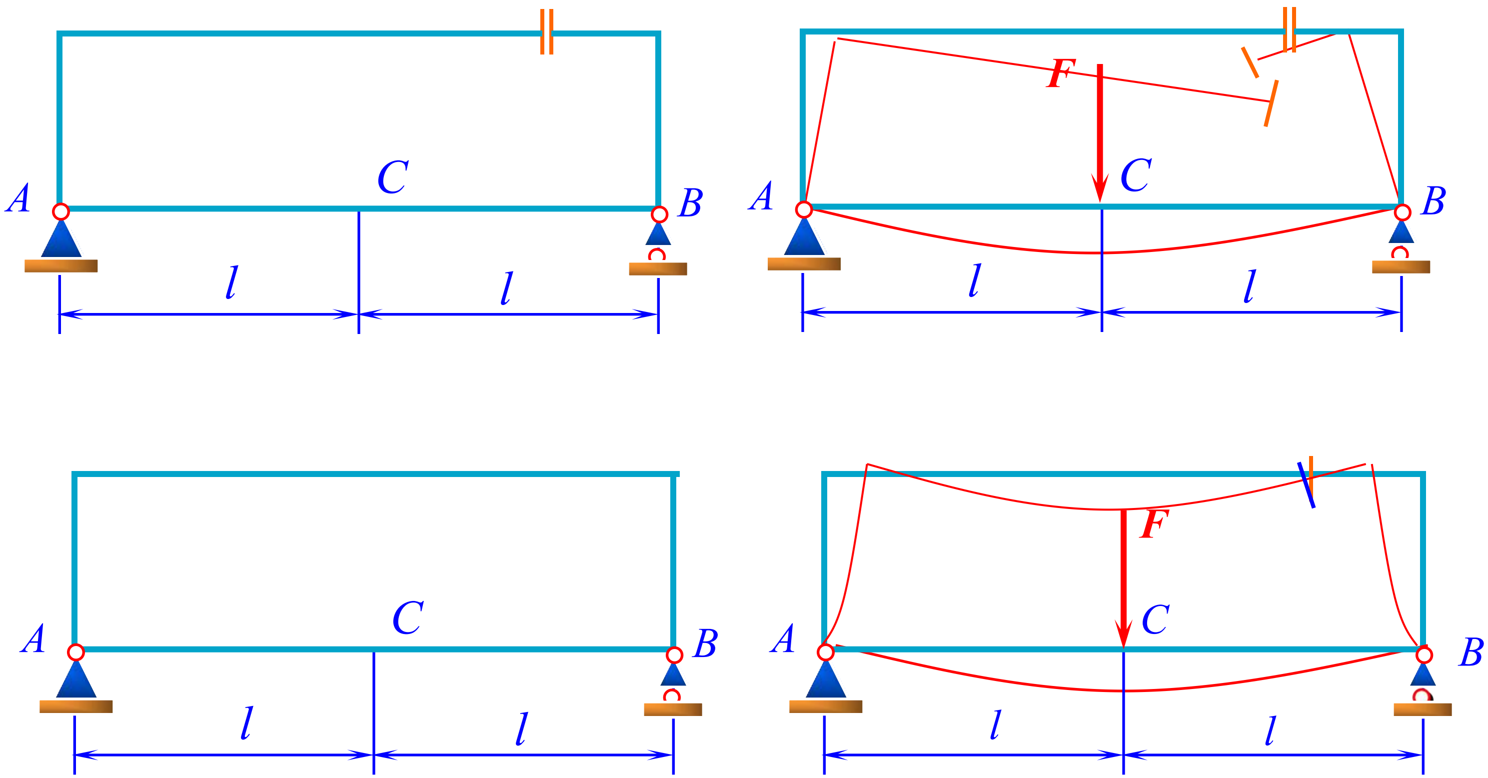
外约束——多余约束与非多余约束

多余约束——在静定结构上附加的约束。



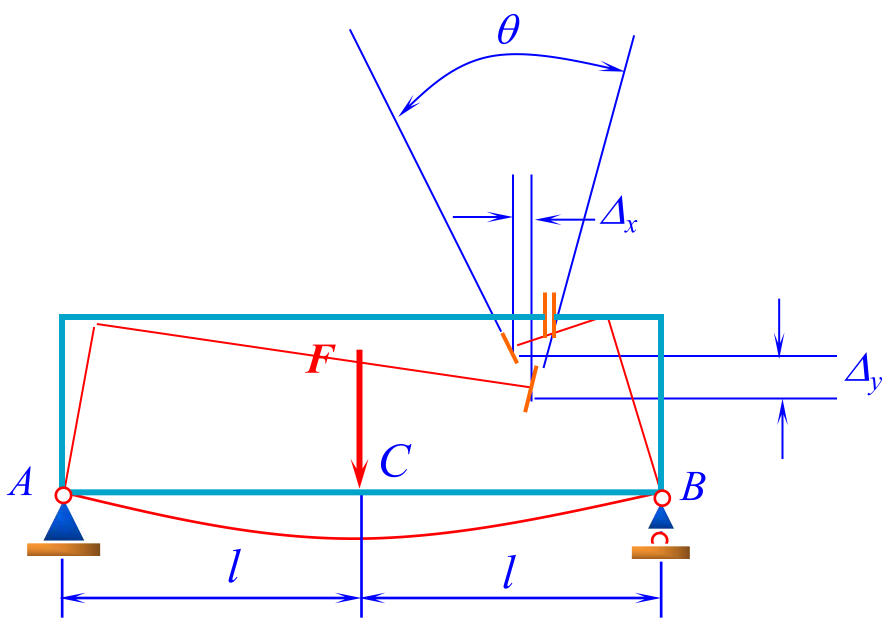
内约束

内约束——横截面（或一处）两侧部分之间的相互约束



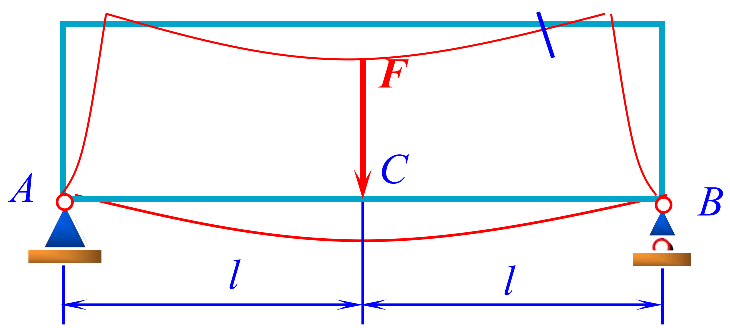
内约束

内约束——保持变形协调所必需的约束



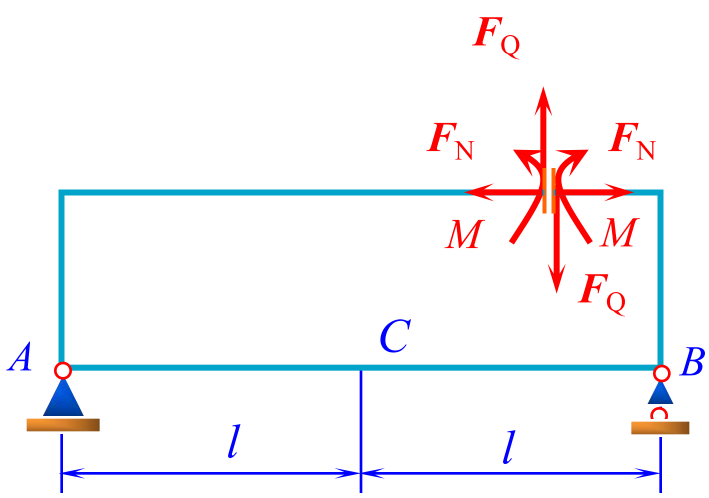
内约束

内约束——保持变形协调所必需的约束



内约束

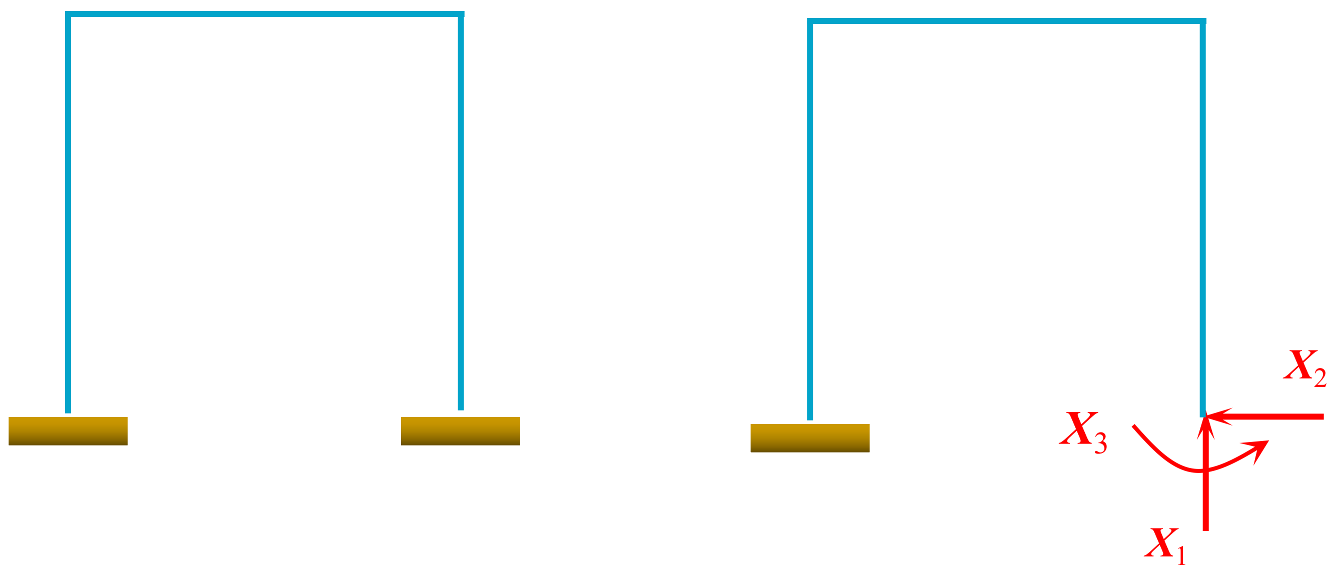
内约束——保持变形协调所必需的约束



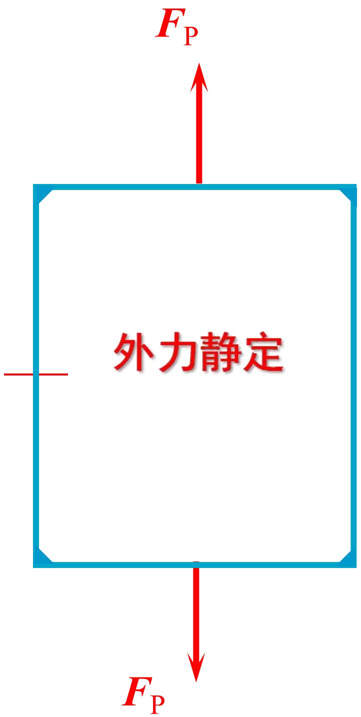
★ 几种静不定结构

凡是根据平衡方程不能确定全部未知约束力或内力的结构或者结构系统，都称为静不定结构或静不定系统。

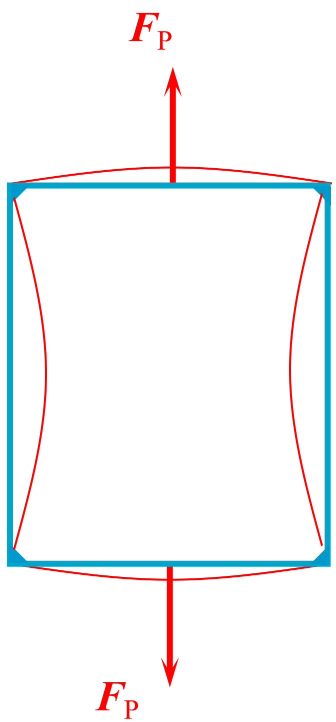
外力静不定系统



问题：

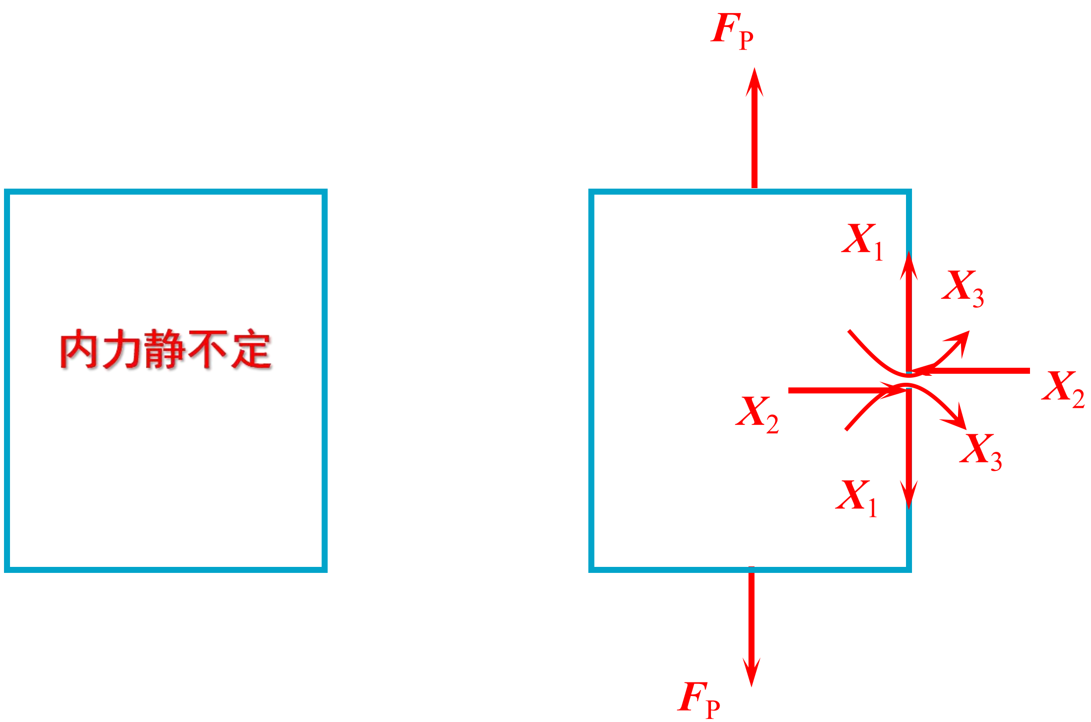


- 竖杆将发生什么变形？
- 竖杆横截面上将产生什么内力分量？



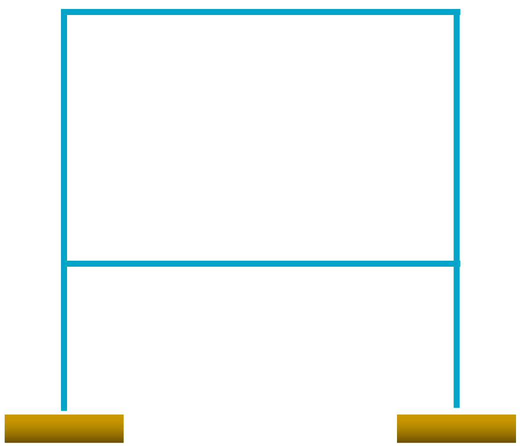
- 竖杆与横杆之间能不能保持直角？
- 为了保持直角竖杆将会产生什么变形？

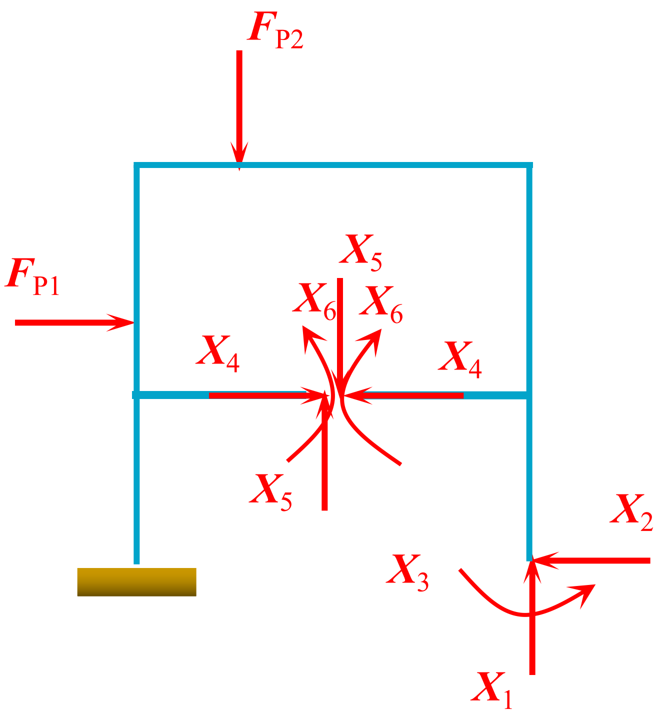
内力静不定系统



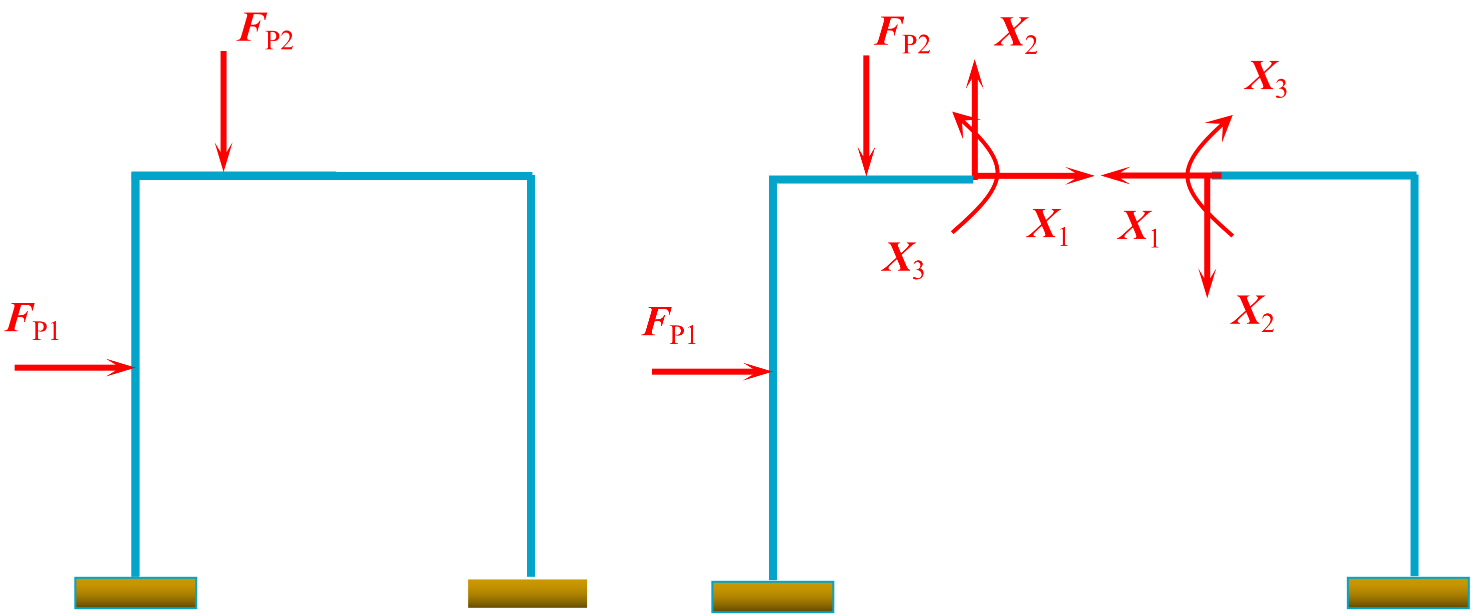
重要结论：对于平面闭合框架（平面结构，载荷作用线位于结构平面内），每截开一个横截面就会出现3个内力分量——轴力、剪力和弯矩。

混合静不定系统





外力静不定问题可以作为内力静不定问题处理



★ 静不定次数

未知力的个数与独立平衡方程数的差值，称为静不定次数。

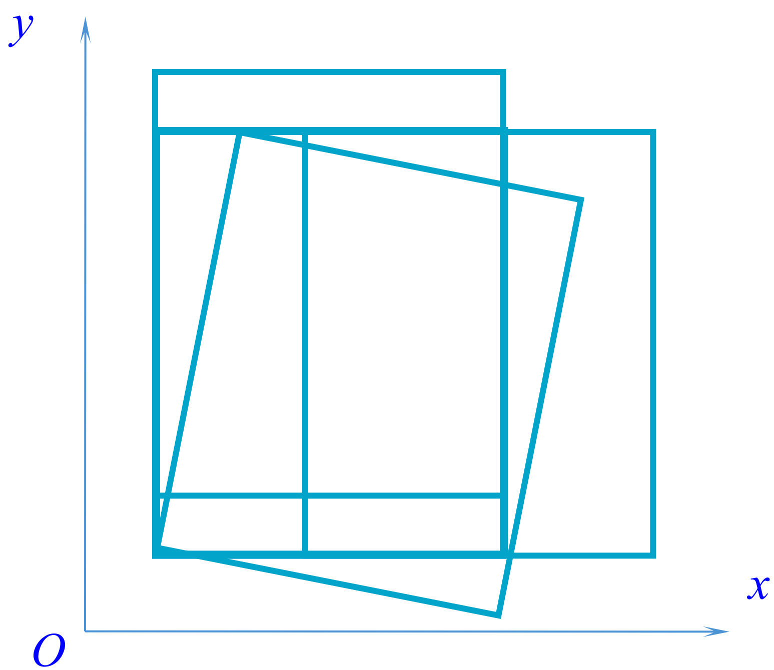
有固定约束静不定结构的静不定次数

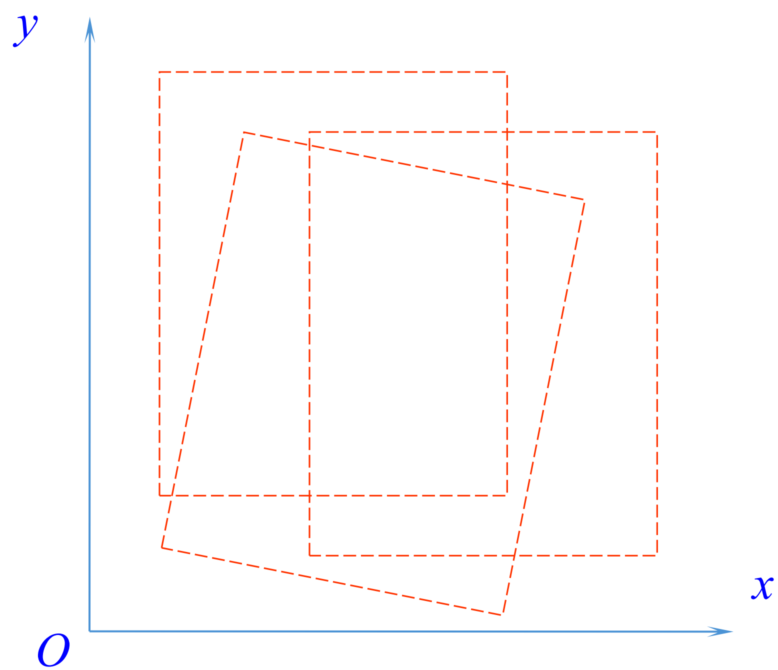
静不定次数＝固定约束数目－平衡对象数×3

3＋3－1×3＝3

无固定约束框架静不定次数

对于没有固定约束的平面闭合框架，它在空间有3个自由度，需要3个约束，确定它在空间的位置，才能形成结构。

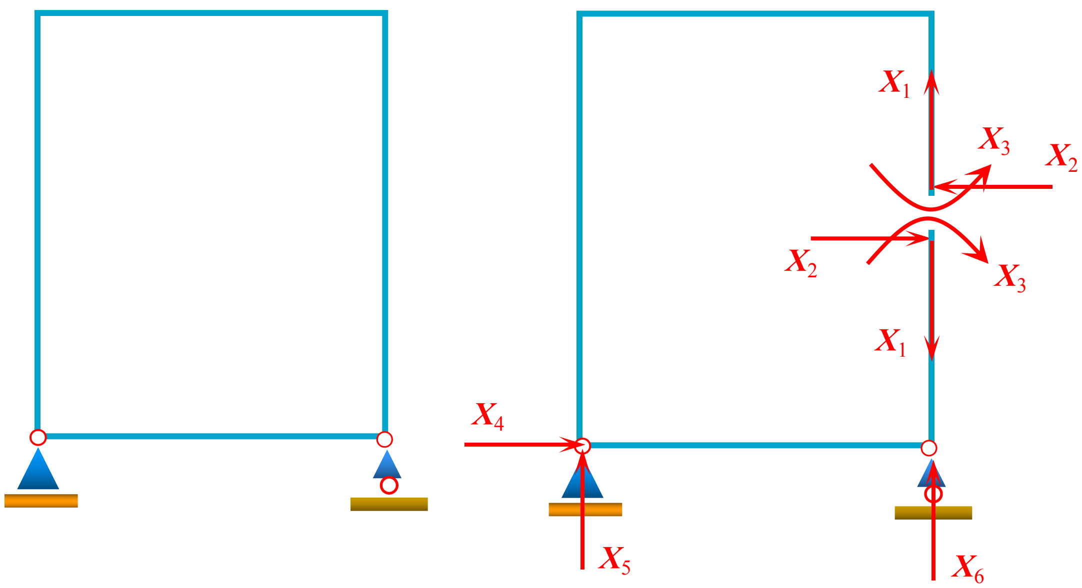




自由度的概念

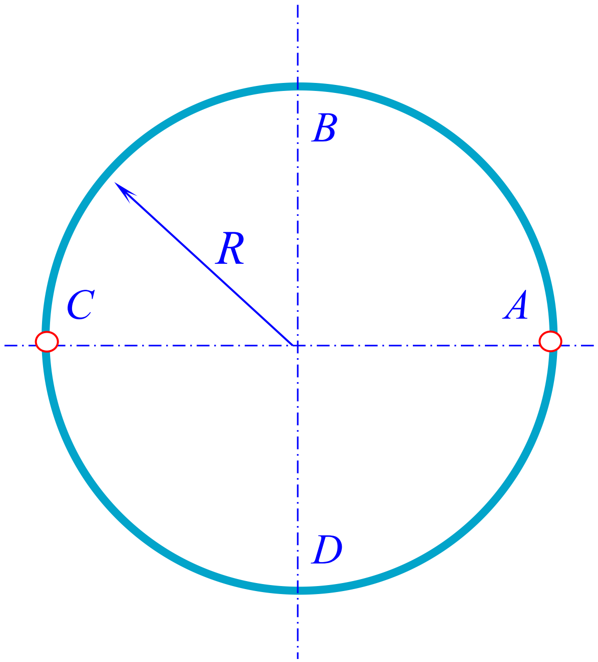
无固定约束框架静不定次数

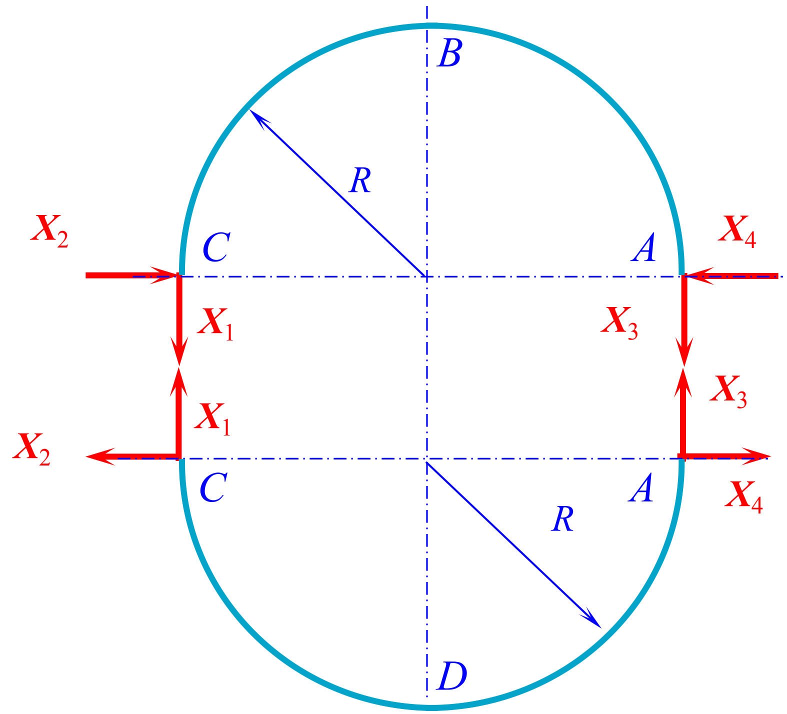
对于没有固定约束的平面闭合框架，它在空间有3个自由度，需要3个约束，确定它在空间的位置，才能形成结构。



静不定次数＝独立的内约束力个数＋3－独立的平衡方程数目

静不定次数＝3＋3－1×3＝3

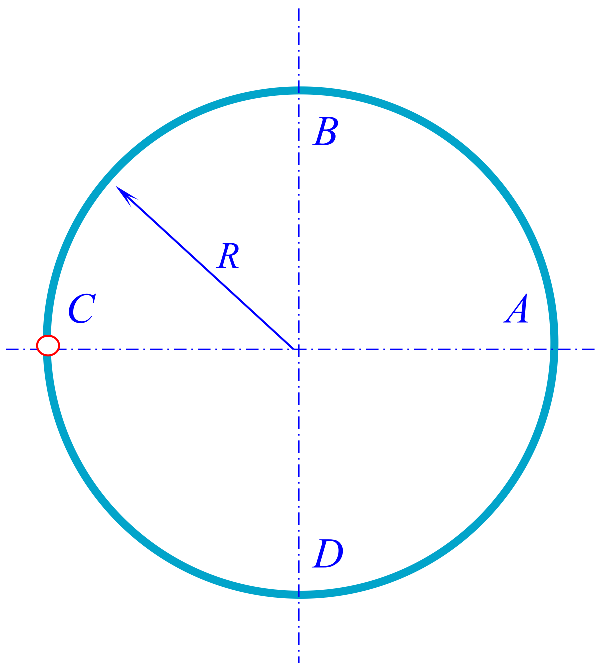


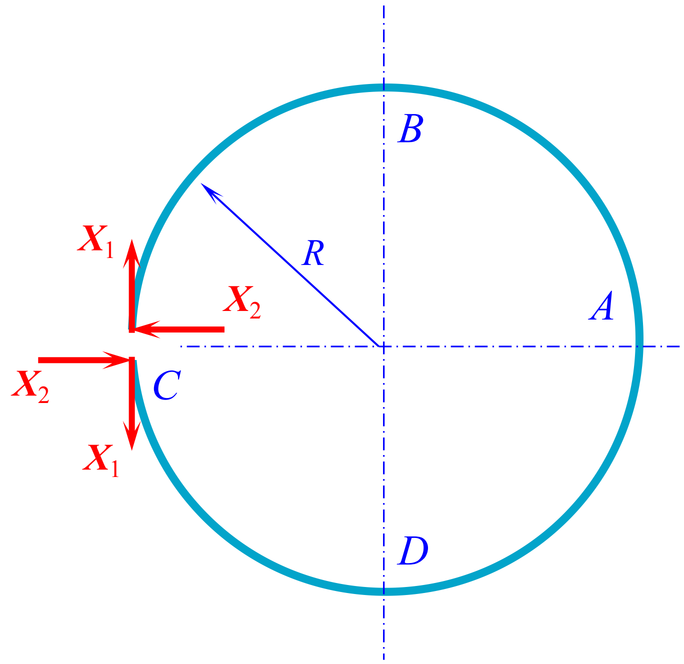


静不定次数 ?

静不定次数＝独立内约束力的个数＋3－独立的平衡方程数目

静不定次数＝ 4 ＋ 3 －2×3＝1



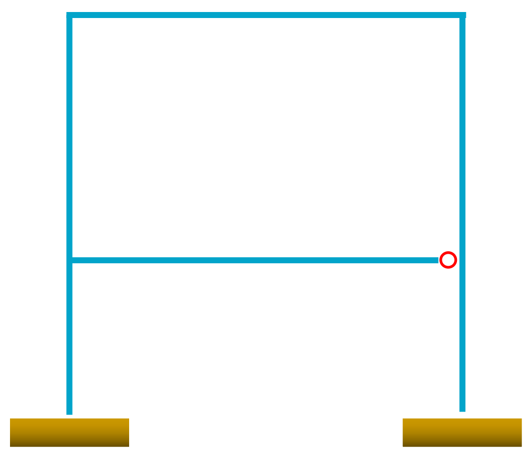


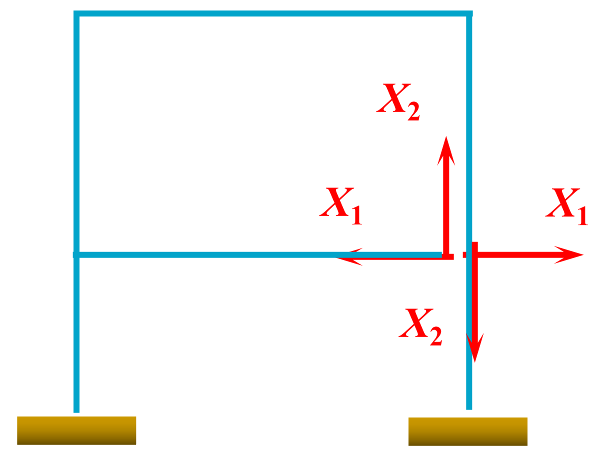
静不定次数 ？

静不定次数＝独立内约束力的个数＋3－独立的平衡方程数目

静不定次数＝ 2 ＋ 3 －1×3＝2

混合静不定结构的静不定次数



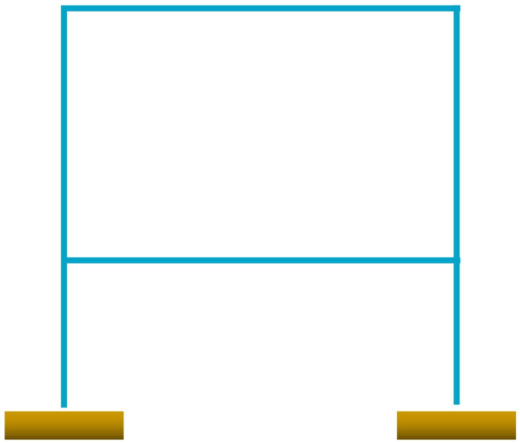


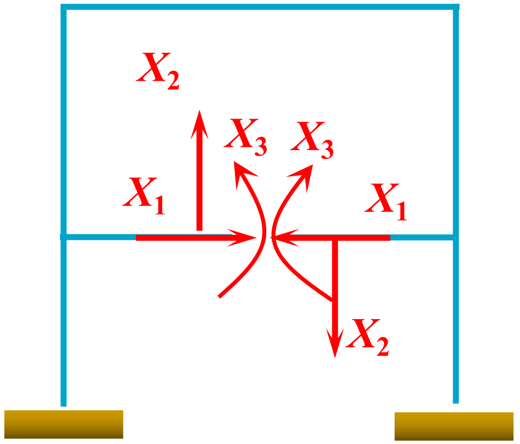
几次静不定?

外约束数目+独立的内约束数目－平衡对象数×3

6+2－1×3＝5

混合静不定结构的静不定次数





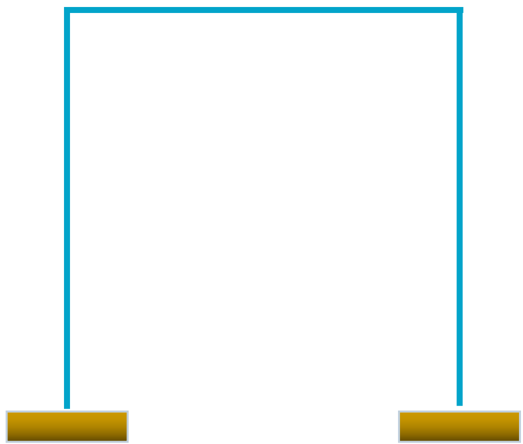
几次静不定？

外约束数目+独立的内约束数目－平衡对象数×3

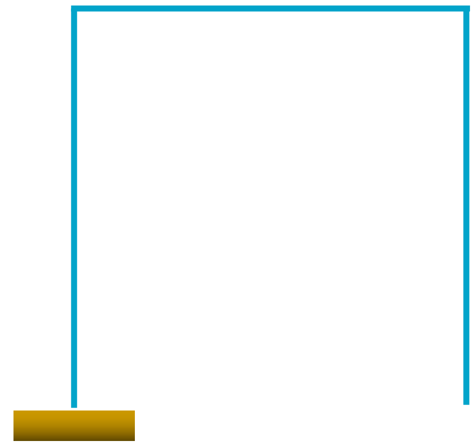
$6+3-1\times3=6$

★ 静定基本系统

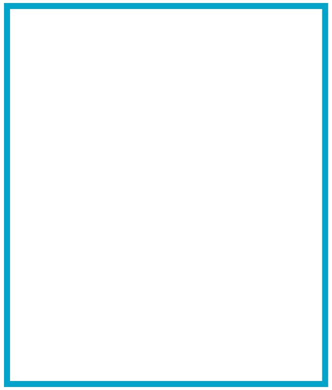
解除静不定系统的多余约束(包括外约束和内约束)，所得到的静定系统，称为与原来的静不定系统相对应的**静定基本系统**。

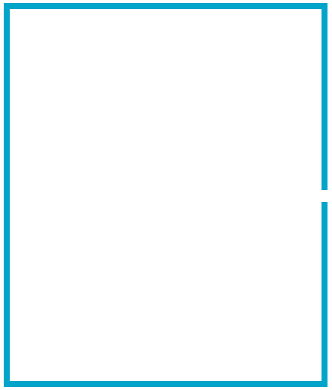


静不定系统

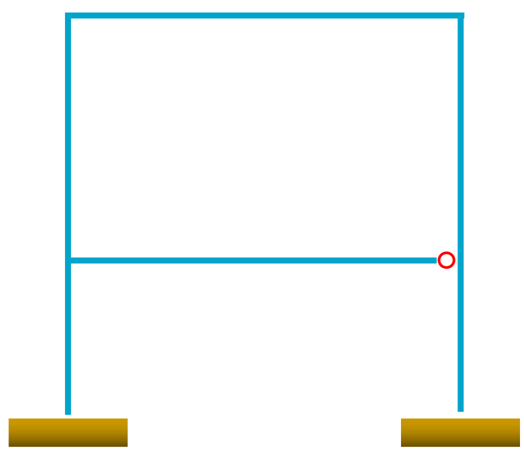


静定基本系统

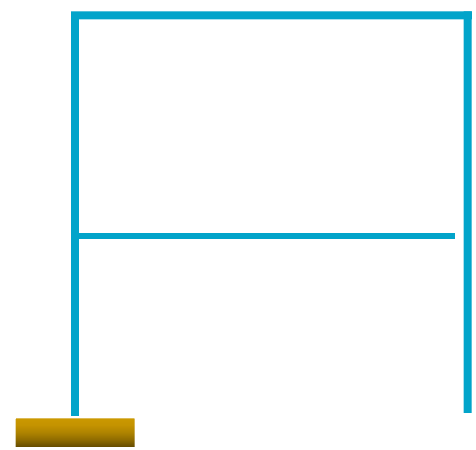




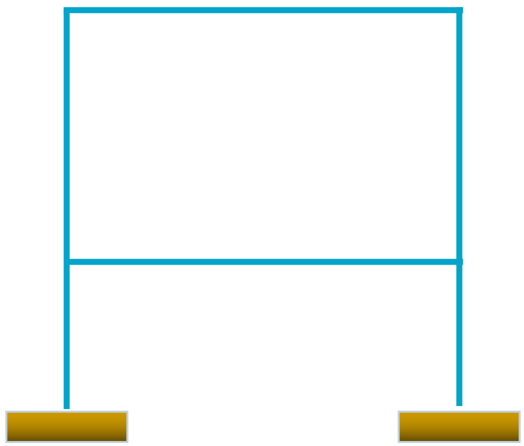
静不定系统　　　　**静定基本系统**



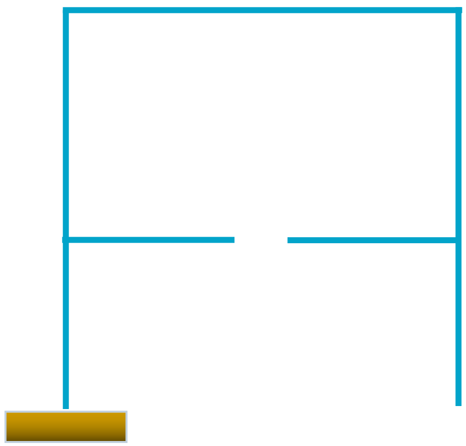
静不定系统



静定基本系统

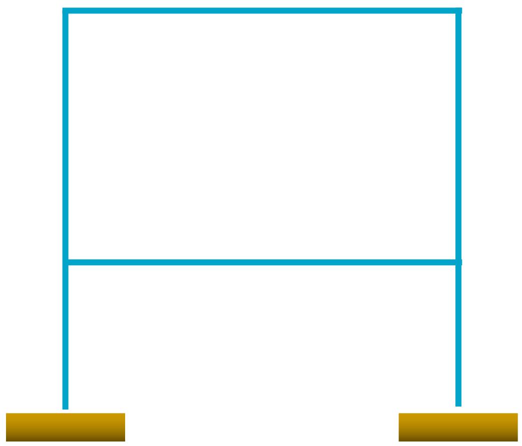


静不定系统

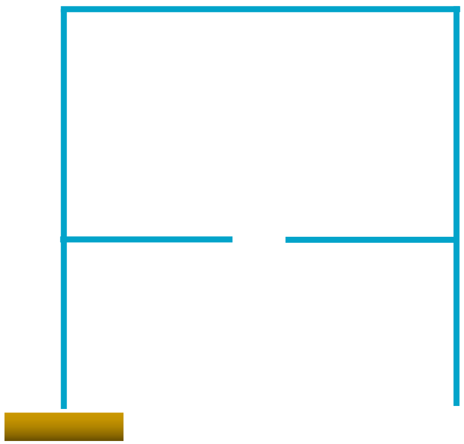


静定基本系统

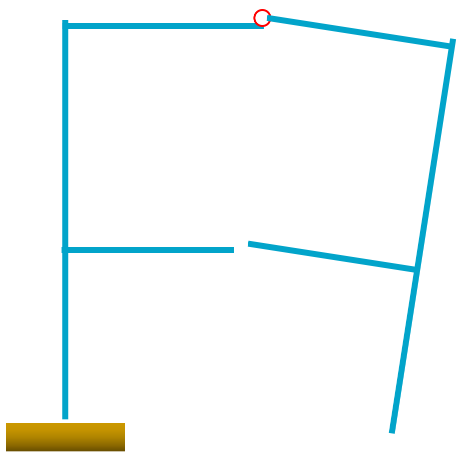
需要注意的是，解除多余约束（包括内约束和外约束）后的结构必须是几何不可变的静定结构。



静不定结构



几何不可变的静定结构

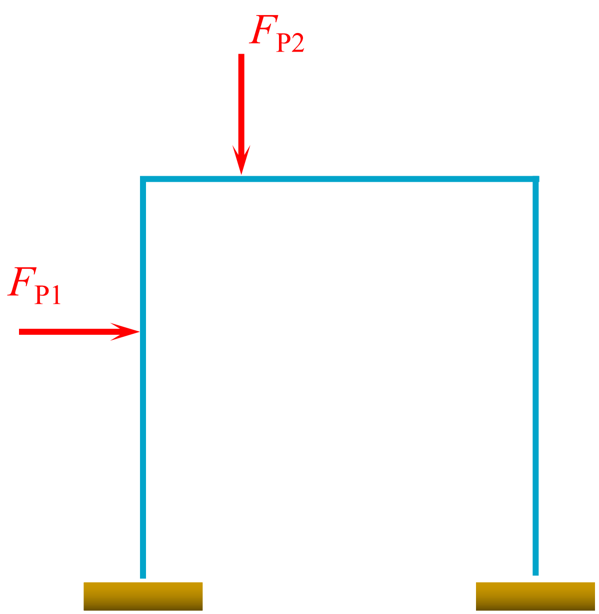


几何可变的机构

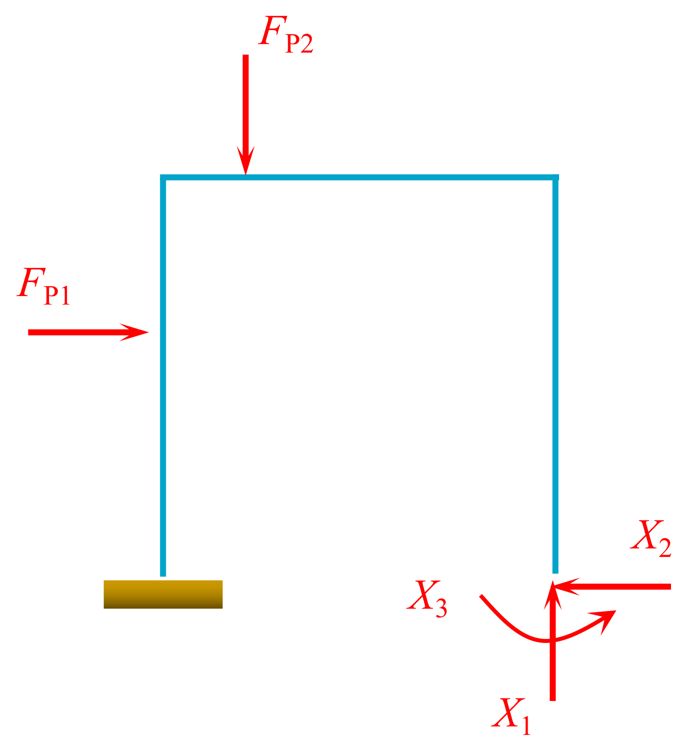
静定基本系统上既没有外加载荷也没有约束力。

★ 相当系统

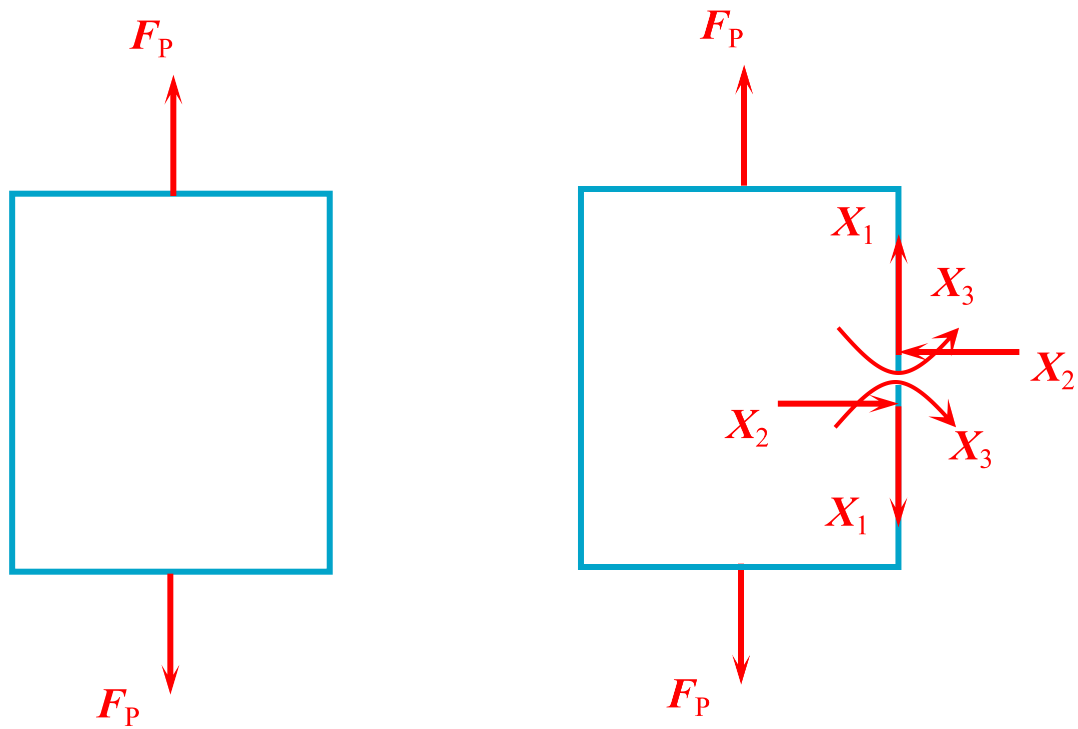
在静定基本系统上施加作用在静不定系统的全部外载荷以及全部多余约束力，所得到静定系统，称为静不定系统的**相当系统**。



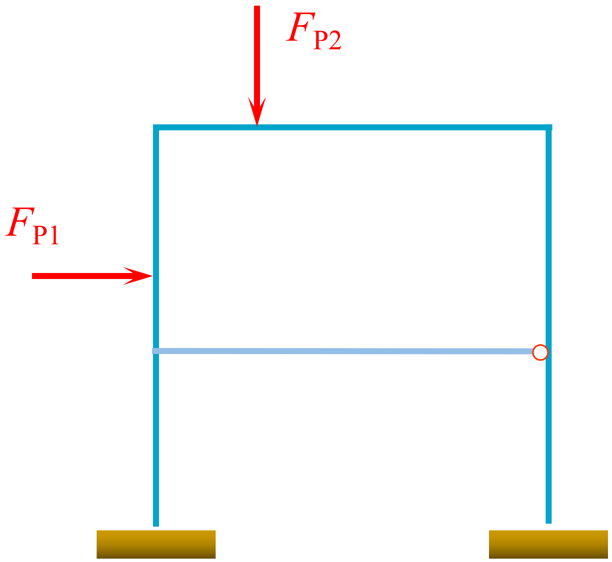
静不定系统



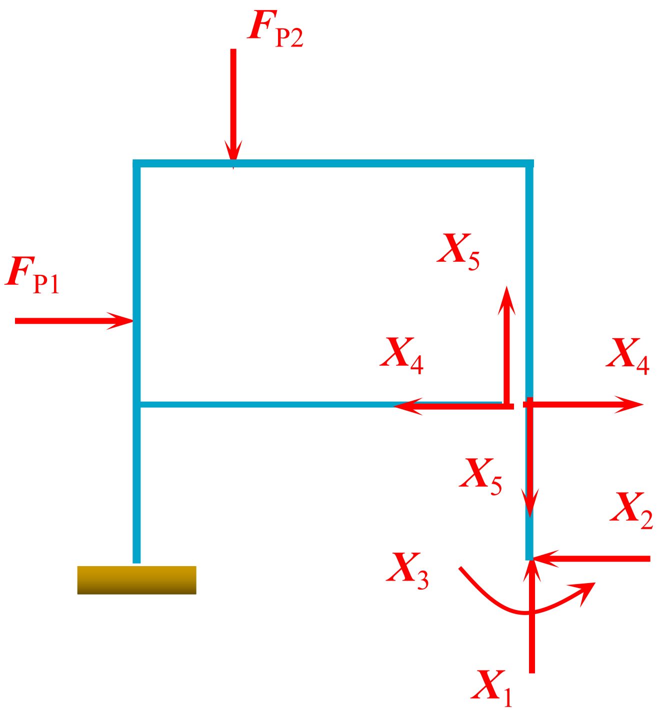
相当系统



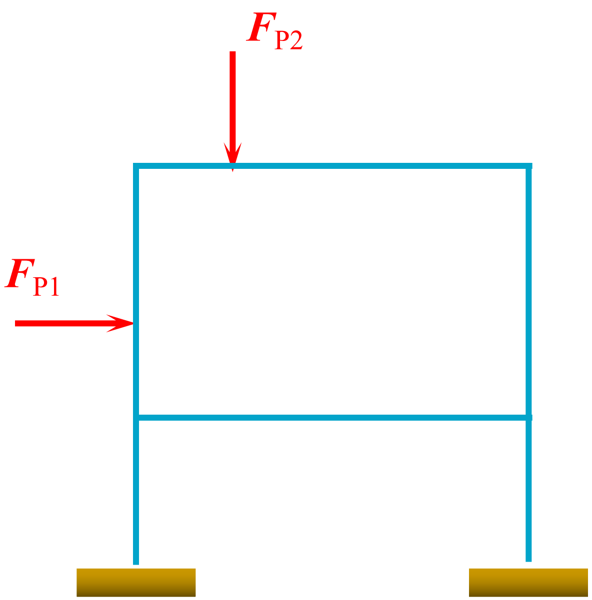
静不定系统 **相当系统**



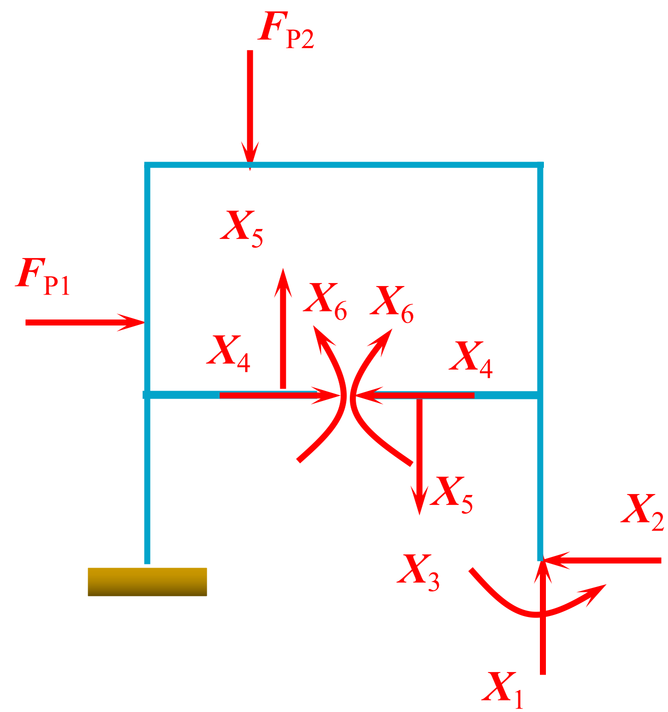
静不定系统



相当系统



静不定系统



相当系统

■ 力法与正则方程

由变形条件和物理条件可以得到求解静不定系统的补充方程。

在补充方程中如以位移作为未知量，而将未知力均表示为未知位移的形式，从而通过求解未知位移来求解未知力，这种方法称为“位移法”。

如果以力作为未知量，而将位移均表示为力的形式，从而解出未知力，进而亦可解得位移，此法称为“**力法**”。

对于一个n次静不定系统，则有n个多余约束力(包括外约束力与内约束力)，这些未知力分别用X_1，X_2，…，X_n表示。

在**力法**中，反映多余约束处位移受到限制的变形协调条件可以写成规则的未知力的线性方程组，称为“**正则方程**”。

如果结构所有多余约束（包括外约束和内约束）处的位移（包括线位移和角位移）都被限制为零，则可以写出多余约束处的变形协调方程。

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_{1P}+\Delta_{1X_1}+\Delta_{1X_2}+\cdots+\Delta_{1X_n}=0 \\
&\Delta_{2P}+\Delta_{2X_1}+\Delta_{2X_2}+\cdots+\Delta_{2X_n}=0 \\
&\qquad\qquad\cdots \\
&\Delta_{nP}+\Delta_{nX_1}+\Delta_{nX_2}+\cdots+\Delta_{nX_n}=0
\end{aligned}\right\}$$

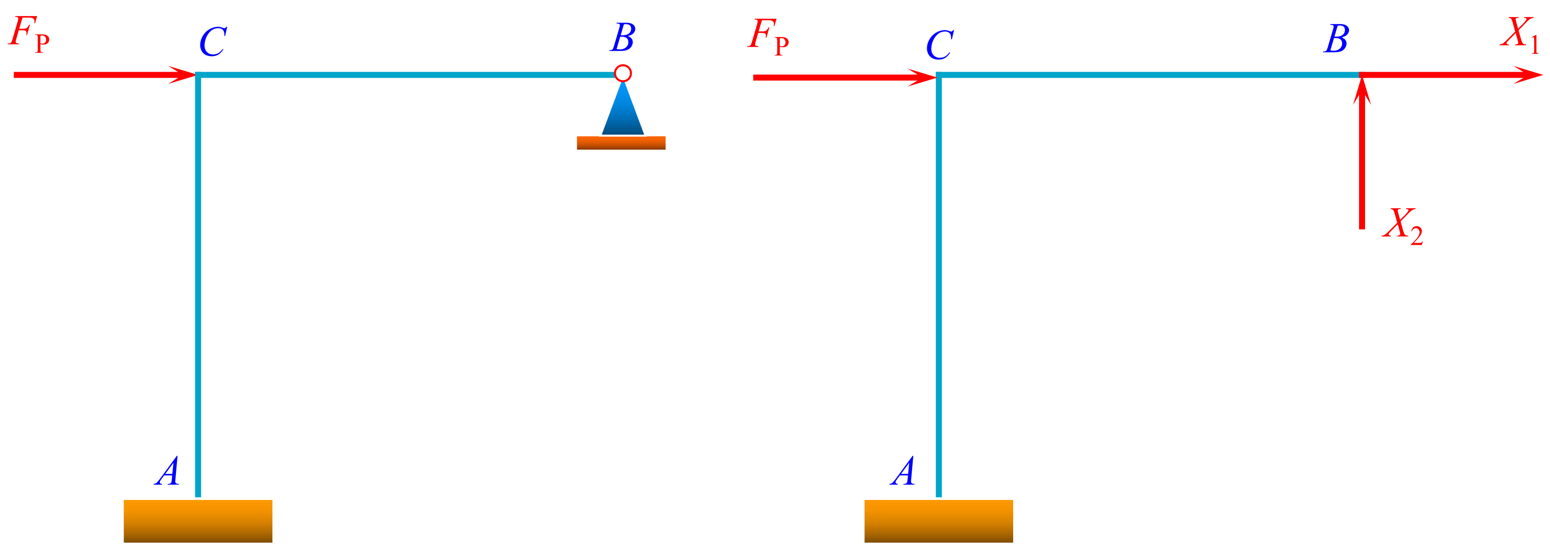
→ 多余约束X_1方向的约束条件

→ 多余约束X_2方向的约束条件

…

→ 多余约束X_n方向的约束条件

如果结构所有多余约束（包括外约束和内约束）处的位移（包括线位移和角位移）都被限制为零，则可以写出多余约束处的变形协调方程。



$$\left.\begin{aligned} \Delta_{1P}+\Delta_{1X_1}+\Delta_{1X_2}&=0 \\ \Delta_{2P}+\Delta_{2X_1}+\Delta_{2X_2}&=0 \end{aligned}\right\}$$

→ **B处多余约束X_1方向的约束条件**

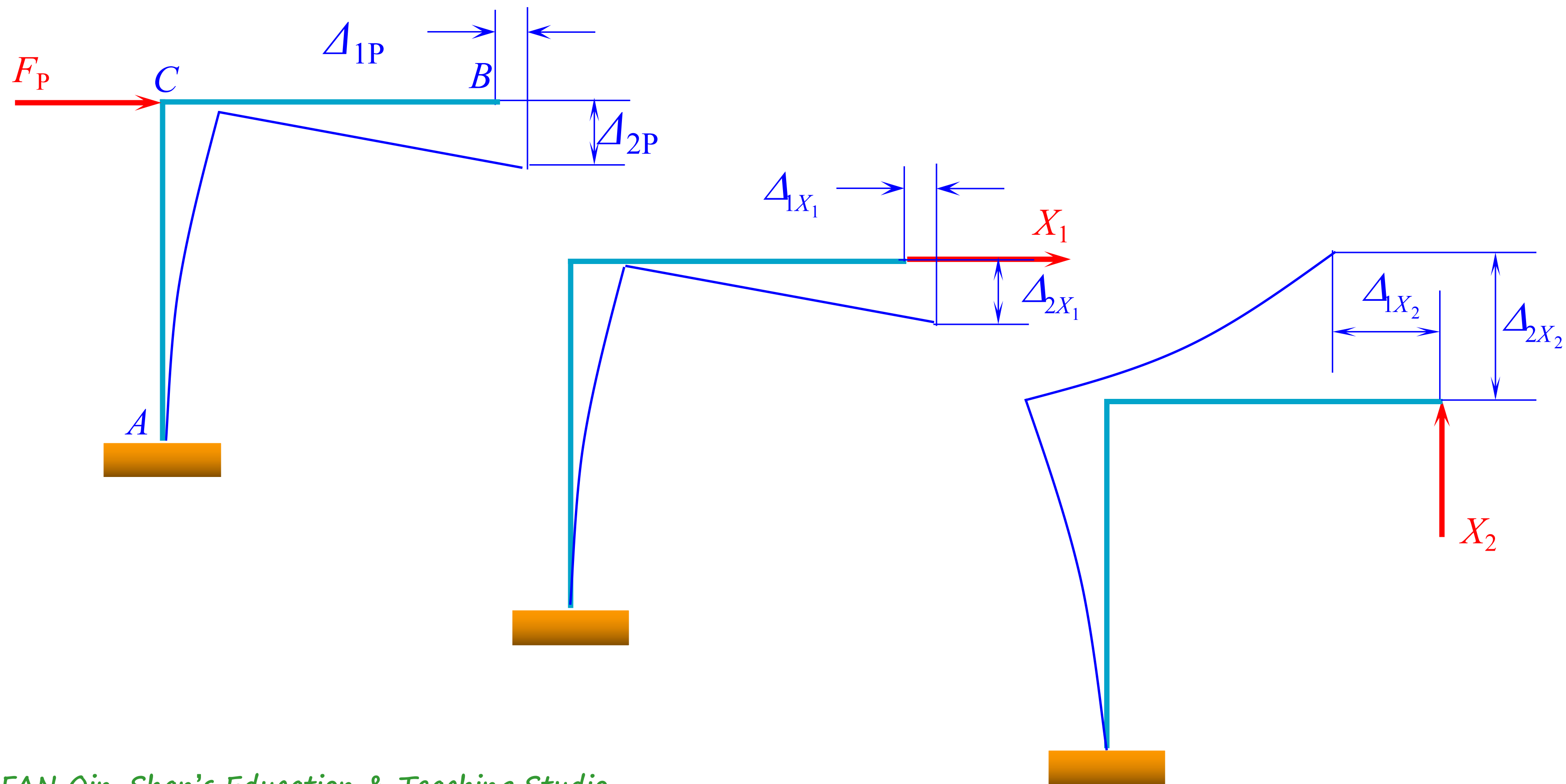
→ **B处多余约束X_2方向的约束条件**

正确理解变形协调方程中每一项的含义！

$$\left.\begin{aligned}\varDelta_{1P}+\varDelta_{1X_1}+\varDelta_{1X_2}&=0\\ \varDelta_{2P}+\varDelta_{2X_1}+\varDelta_{2X_2}&=0\end{aligned}\right\}$$

$\varDelta_{ij}$

第一个下标 i 表示位移的方向；
第二个下标 j 表示引起位移的力



$$\left.\begin{aligned}\varDelta_{1\mathrm{P}}+\varDelta_{1X_1}+\varDelta_{1X_2}&=0\\ \varDelta_{2\mathrm{P}}+\varDelta_{2X_1}+\varDelta_{2X_2}&=0\end{aligned}\right\}$$

变形协调方程

变形协调方程中各项都是位移。在位移与力保持线性的情形下，这些位移都与相关的力成正比，因此，多余约束力引起位移都可以表示成未知多余约束力的形式：

$$\varDelta_{1x1}=X_1\delta_{11}\quad \varDelta_{1x2}=X_2\delta_{12}$$

$$\varDelta_{2x1}=X_1\delta_{21}\quad \varDelta_{2x2}=X_2\delta_{22}$$

$$\left.\begin{aligned}X_1\delta_{11}+X_2\delta_{12}+\varDelta_{1\mathrm{P}}&=0\\ X_1\delta_{21}+X_2\delta_{22}+\varDelta_{2\mathrm{P}}&=0\end{aligned}\right\}$$

以力作为未知量的变形协调方程

这就是以力作为未知量的正则方程！

其中 X_1、X_2 **为未知量；**

δ_{11}、δ_{12}、δ_{21}、δ_{22} **为系数；**

$\varDelta_{1\mathrm{P}}$、$\varDelta_{2\mathrm{P}}$ **为常数项。**

$$\left.\begin{aligned} X_1\delta_{11}+X_2\delta_{12}+\Delta_{1P} &= 0 \\ X_1\delta_{21}+X_2\delta_{22}+\Delta_{2P} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

δ_{11}、δ_{12}、δ_{21}、δ_{22} **为系数。**

δ_{11}、δ_{12}、δ_{21}、δ_{22}

是在相应的多余约束处施加单位力所引起的相应位移。

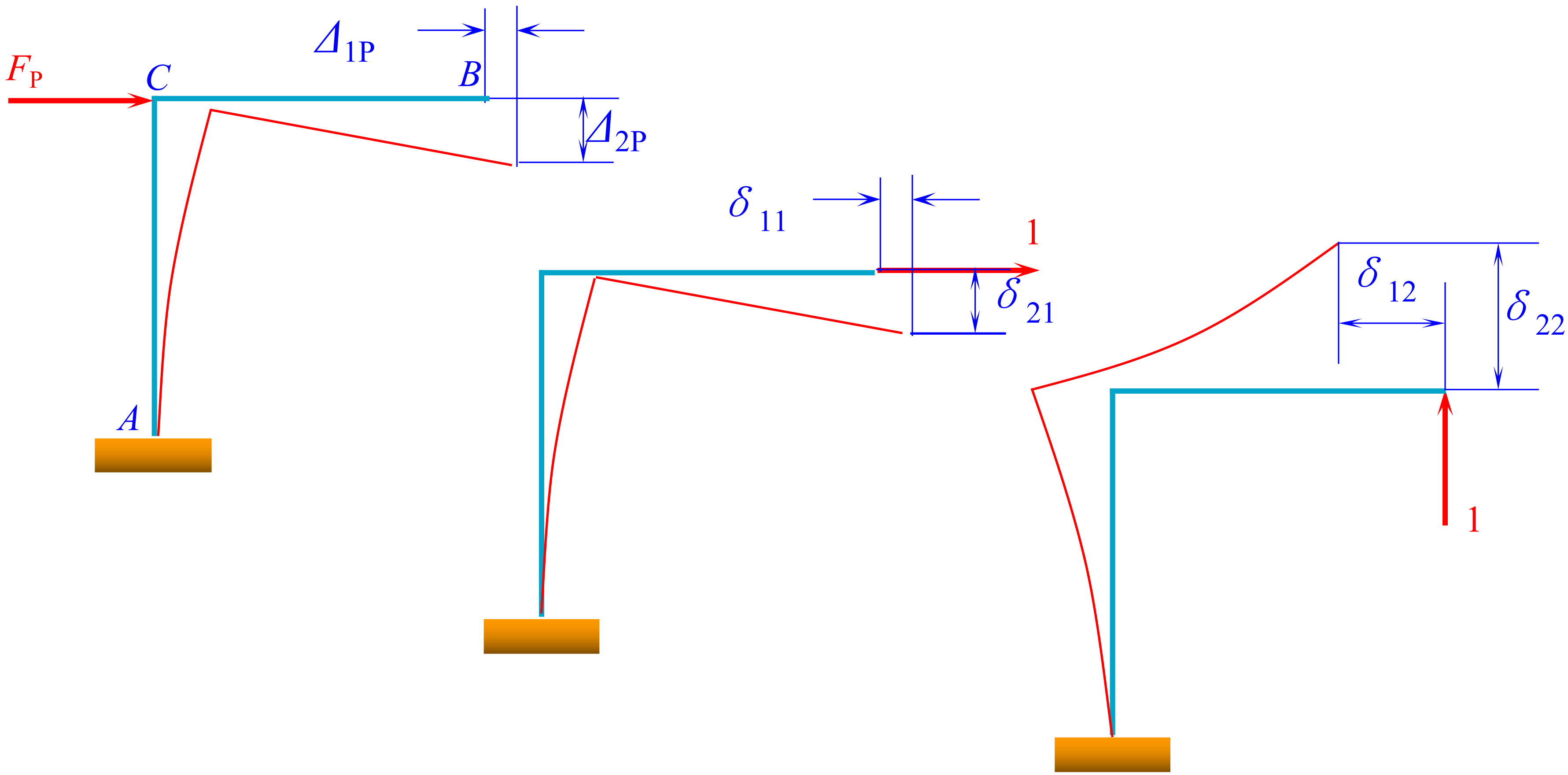
δ_{11}、δ_{12}、δ_{21}、δ_{22}

如何确定?

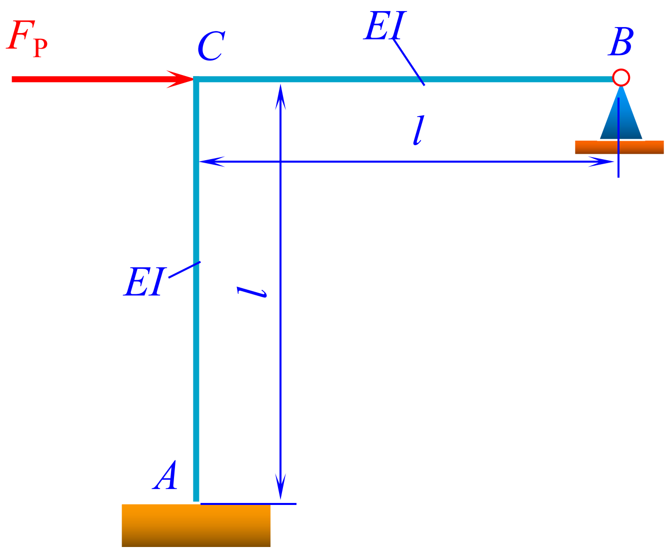
正确理解正则方程中每一项的含义！

$$\left.\begin{aligned} X_1\delta_{11}+X_2\delta_{12}+\Delta_{1P}&=0\\ X_1\delta_{21}+X_2\delta_{22}+\Delta_{2P}&=0 \end{aligned}\right\}$$

δ_{ij} **第一个下标 i 表示位移的方向；**
第二个下标 j 表示引起位移的力

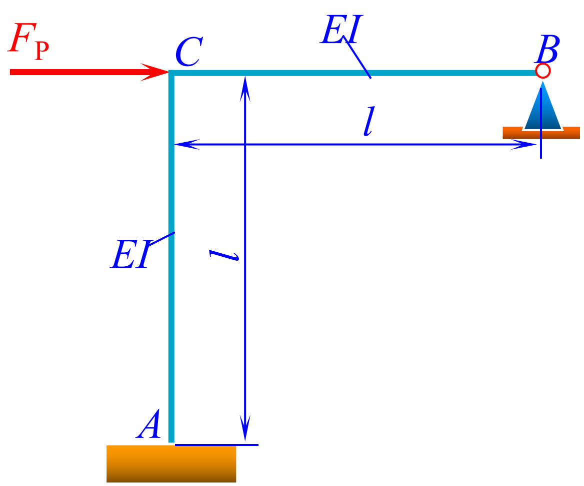


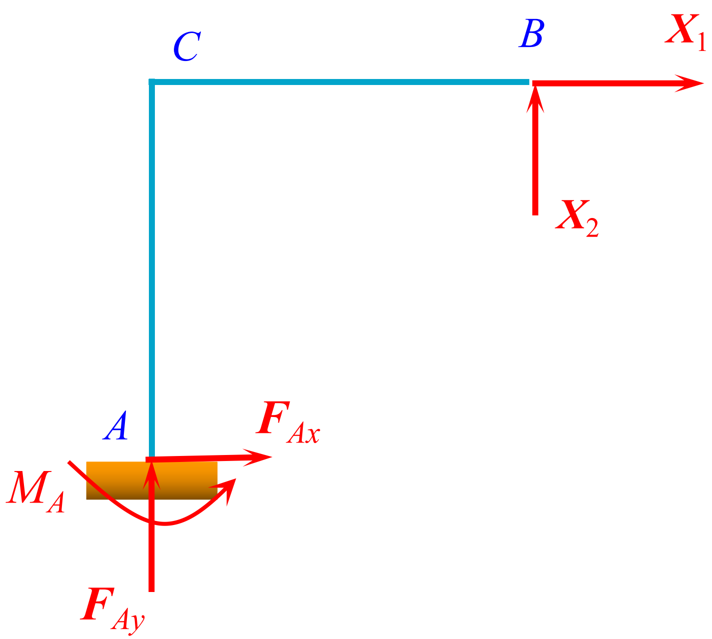
能力训练 1



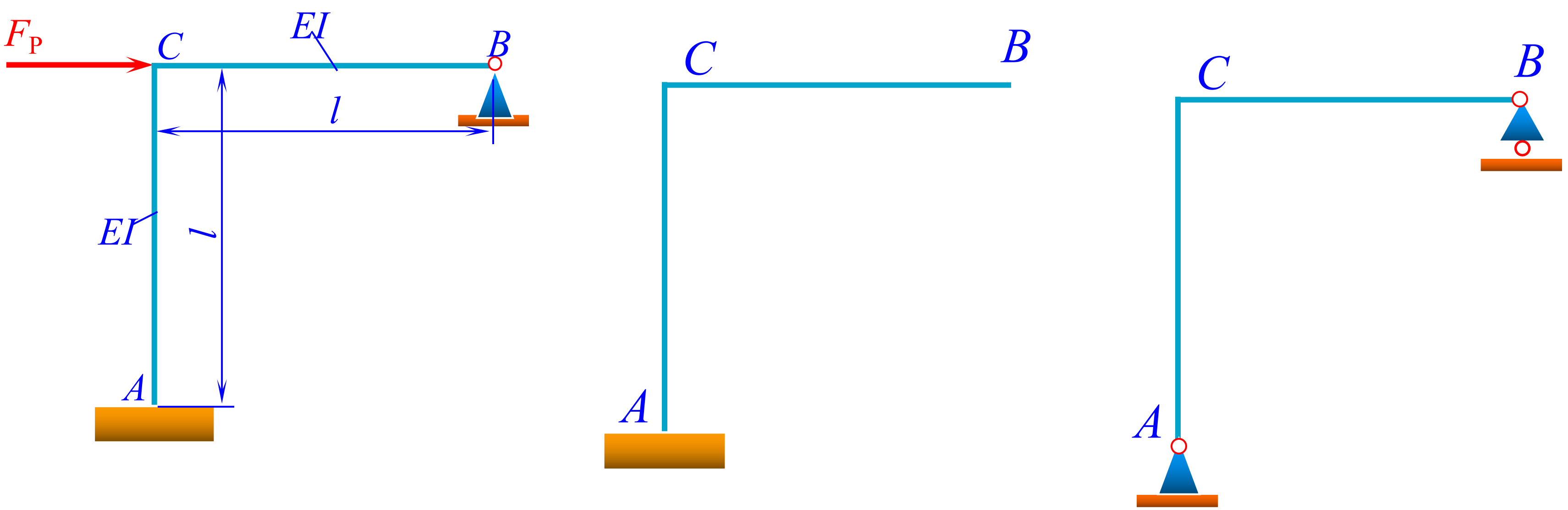
平面刚架受力如图所示，各杆的弯曲刚度均为EI，不考虑剪力和轴力的影响，试画出弯矩图。

解：1、判断结构是静定的还是静不定的，确定静不定次数

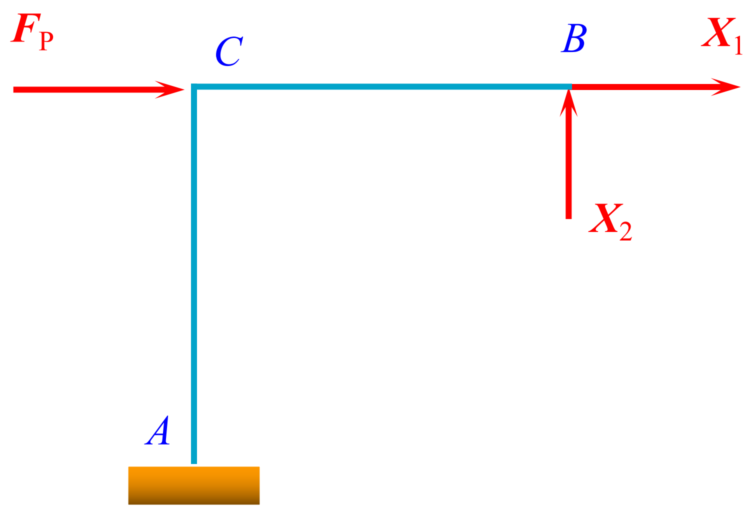




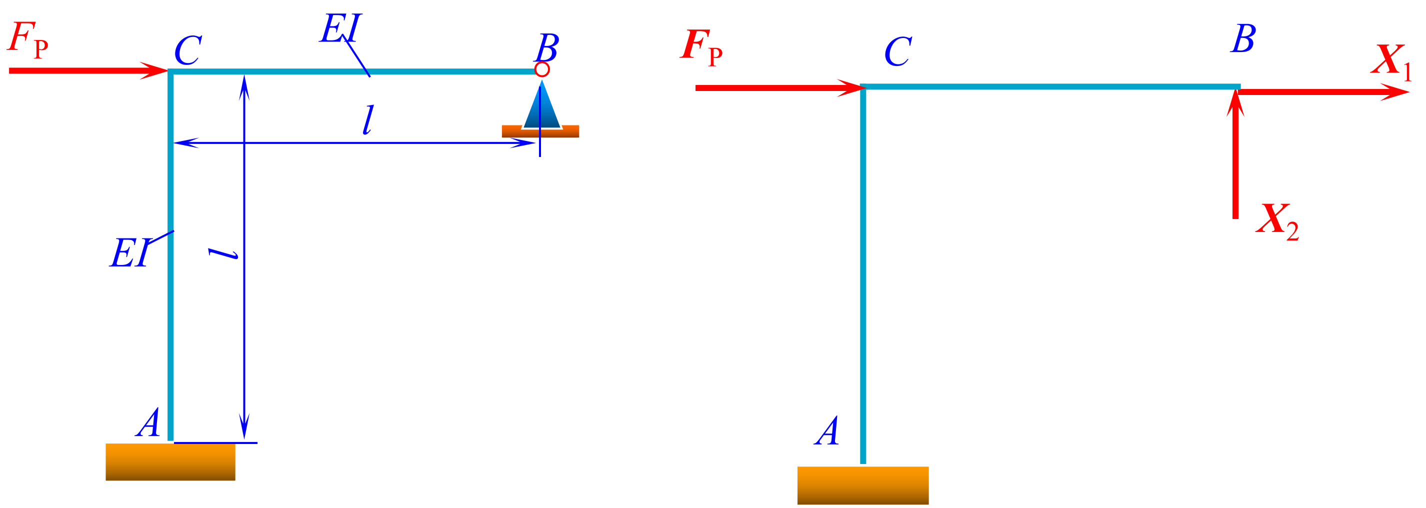
2、选择静定基本系统，建立相当系统



2、选择静定基本系统，建立相当系统

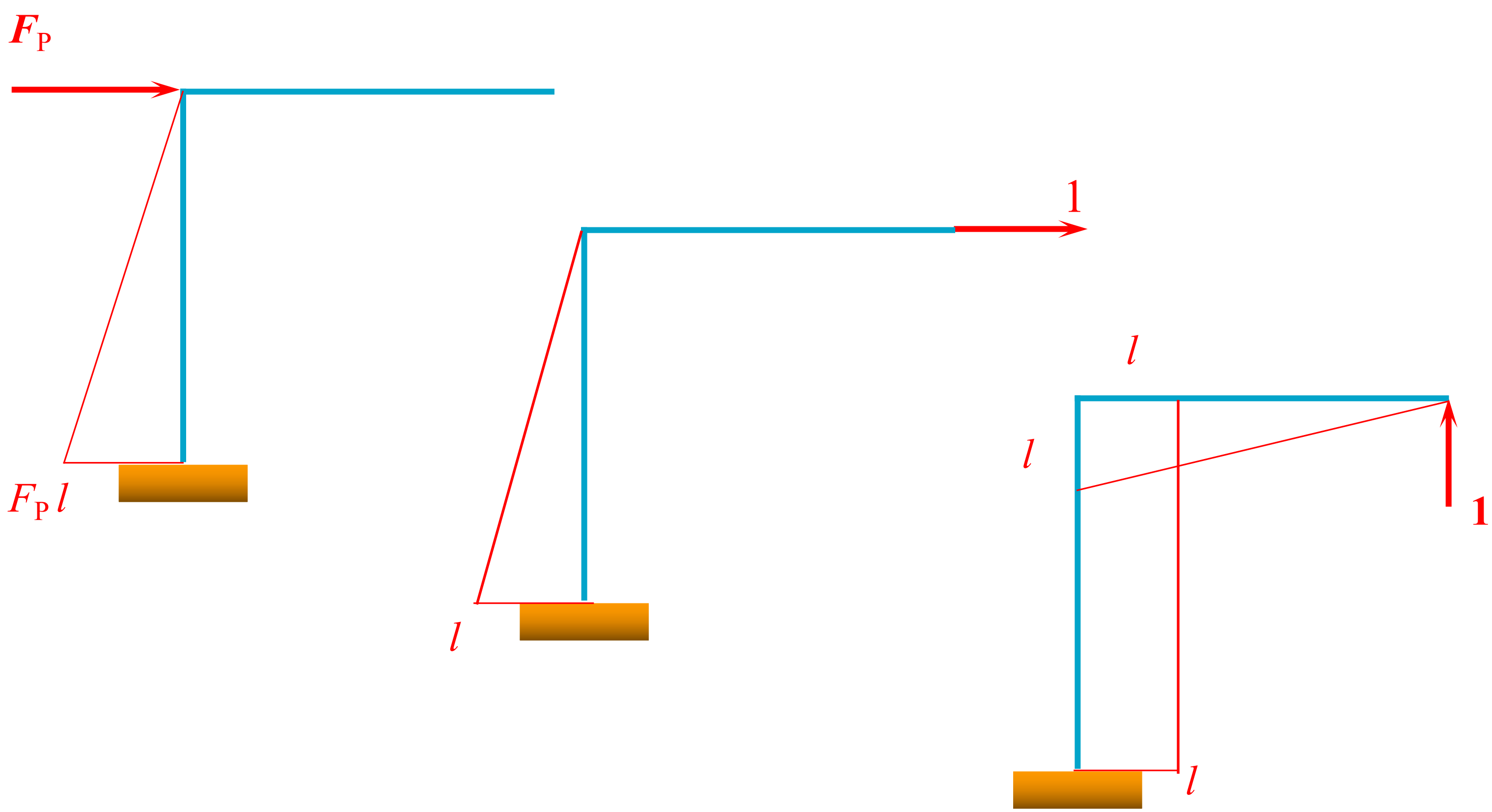


3、比较相当系统与静不定系统，根据变形协调要求写出正则方程

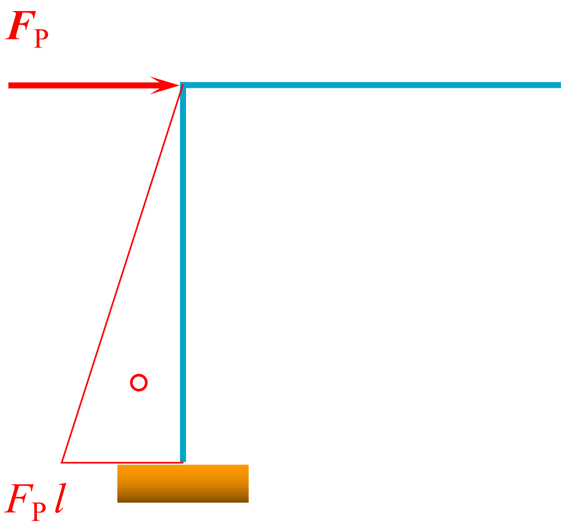


$$\left.\begin{aligned}X_1\delta_{11}+X_2\delta_{12}+\Delta_{1P}=0\\X_1\delta_{21}+X_2\delta_{22}+\Delta_{2P}=0\end{aligned}\right\}$$

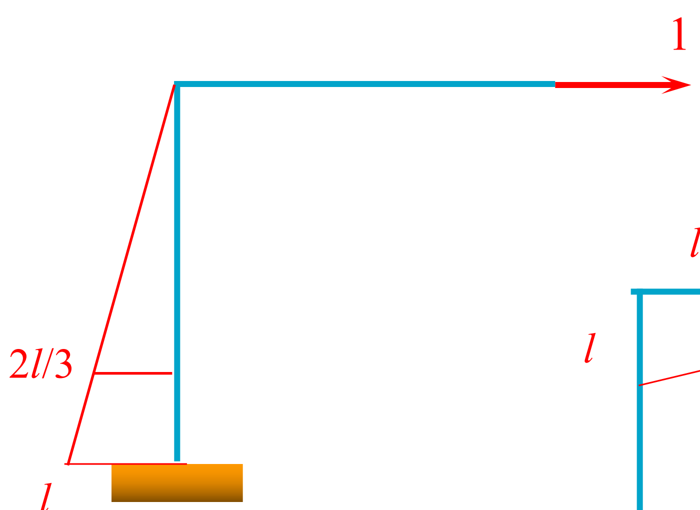
4、建立载荷系统与单位载荷系统，画出相应的弯矩图

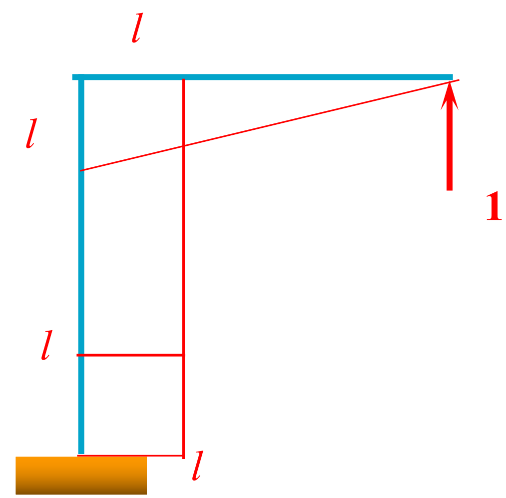


5、应用图乘法计算正则方程中的位移



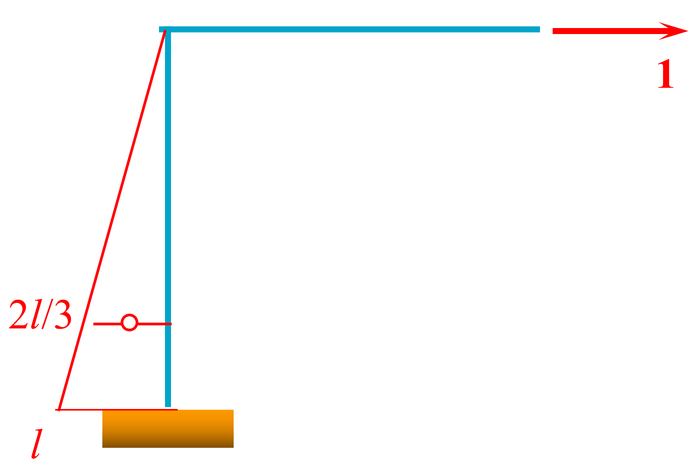
$$\Delta_{1P}=\frac{1}{EI}\left(\frac{F_P l\times l}{2}\times\frac{2l}{3}\right)=\frac{F_P l^3}{3EI}$$

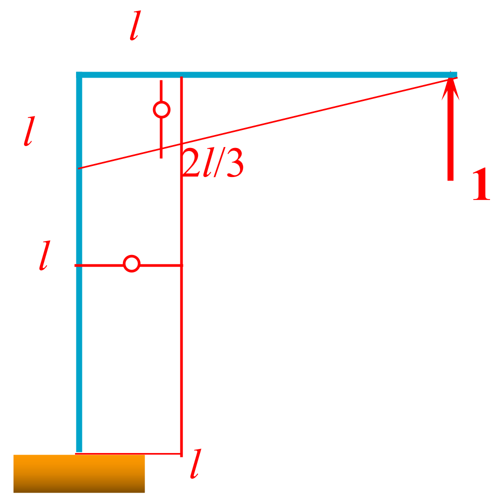




$$\Delta_{2P}=-\frac{1}{EI}\left(\frac{F_P l\times l}{2}\times l\right)=-\frac{F_P l^3}{2EI}$$

5、应用图乘法计算正则方程中的位移

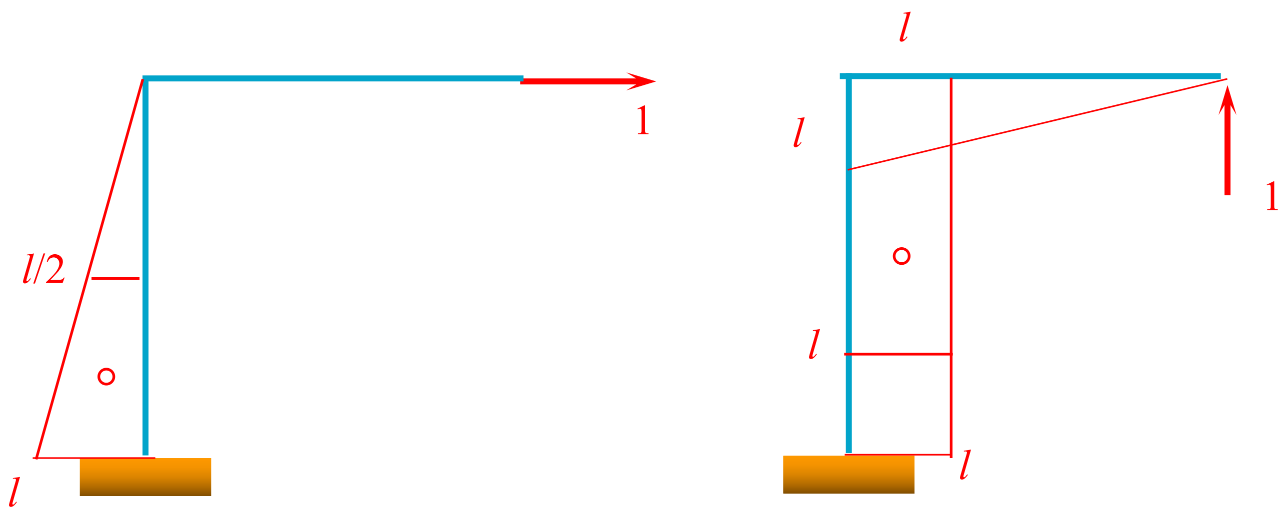




$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(\frac{l\times l}{2}\times\frac{2l}{3}\right)=\frac{l^3}{3EI}$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\left(\frac{l\times l}{2}\times\frac{2l}{3}+l\times l\times l\right)=\frac{4l^3}{3EI}$$

5、应用图乘法计算正则方程中的位移



$$\delta_{12}=\delta_{21}=-\frac{1}{EI}\left(\frac{l\times l}{2}\times l\right)=-\frac{l^3}{2EI}$$

6、将位移代入正则方程并求解联立方程

$$\left.\begin{aligned} X_1\delta_{11}+X_2\delta_{12}+\Delta_{1P}&=0 \\ X_1\delta_{21}+X_2\delta_{22}+\Delta_{2P}&=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\Delta_{1P}=\frac{F_P l^3}{3EI} \qquad \delta_{11}=\frac{l^3}{3EI} \qquad \delta_{22}=\frac{4l^3}{3EI}$$

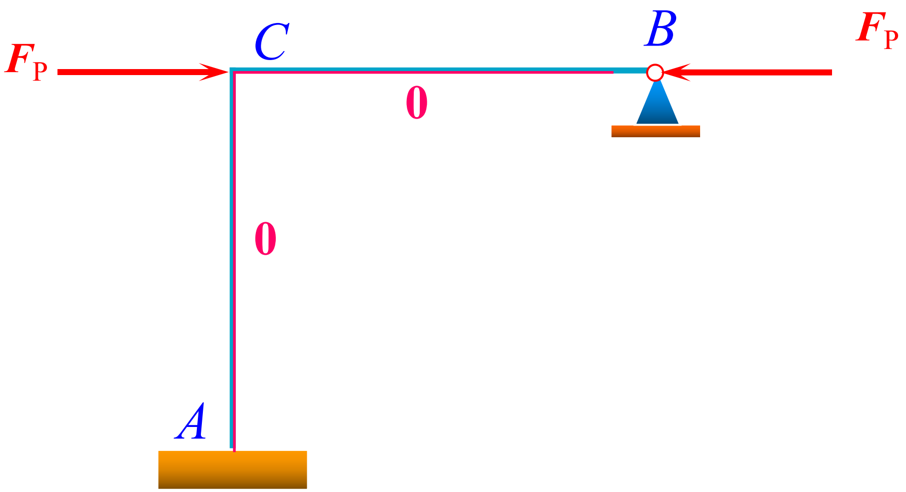
$$\Delta_{2P}=-\frac{F_P l^3}{2EI} \qquad \delta_{12}=\delta_{21}=\frac{l^3}{2EI}$$

$$\left.\begin{aligned} 2X_1-3X_2+2F_P&=0 \\ -3X_1+8X_2-3F_P&=0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} X_2&=0 \\ X_1&=-F_P \end{aligned}\right\}$$

7、画出弯矩图

$$\left.\begin{aligned} X_2 &= 0 \\ X_1 &= -F_P \end{aligned}\right\}$$



■ 对称性与反对称性分析在求解静不定问题中的应用

若结构的几何形状、尺寸、构件材料及约束条件都对称于某一轴，则这样的结构称为对称结构（symmetric structure）。

在不同的载荷作用下，对称结构可能产生对称变形、反对称变形或一般变形。

如能正确而巧妙地应用对称性和反对称性，不仅可以推知某些未知量，而且可以使分析、计算过程大为简化。

★ 对称结构的对称变形

★ 对称结构的反对称变形

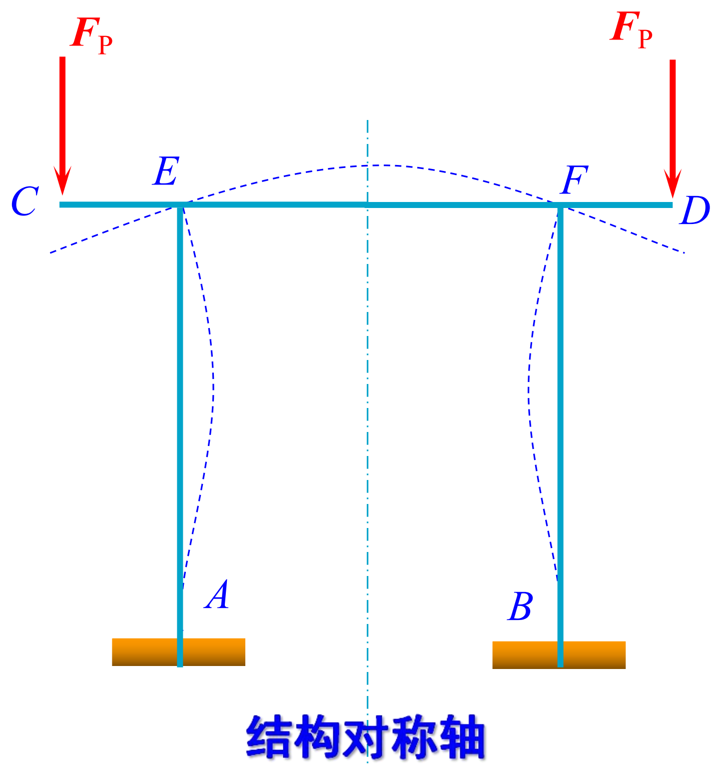
★ 对称结构的一般变形

★ 对称结构的对称变形

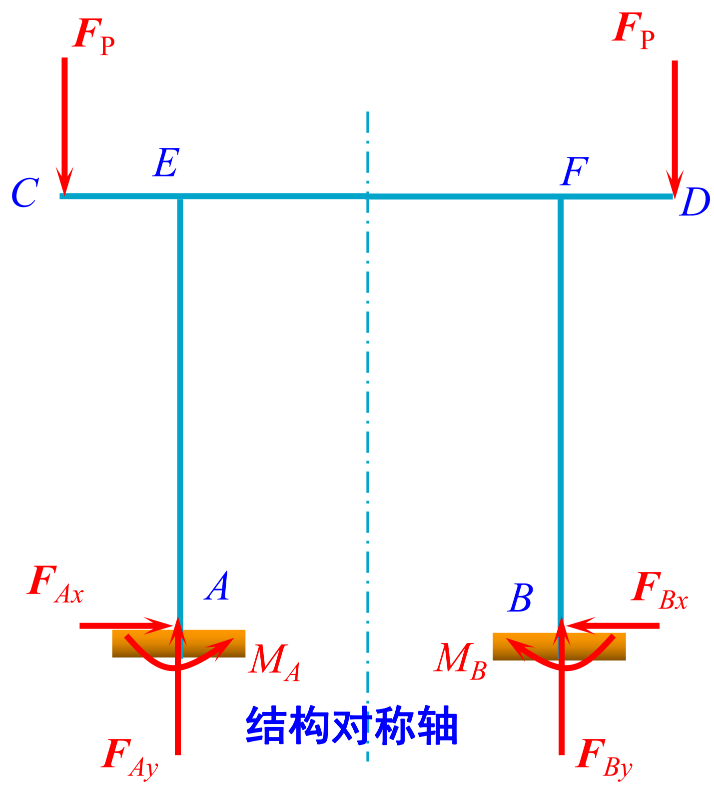
对称结构的对称变形

当对称结构承受对称载荷时，其约束力、内力分量以及位移都是对称的。

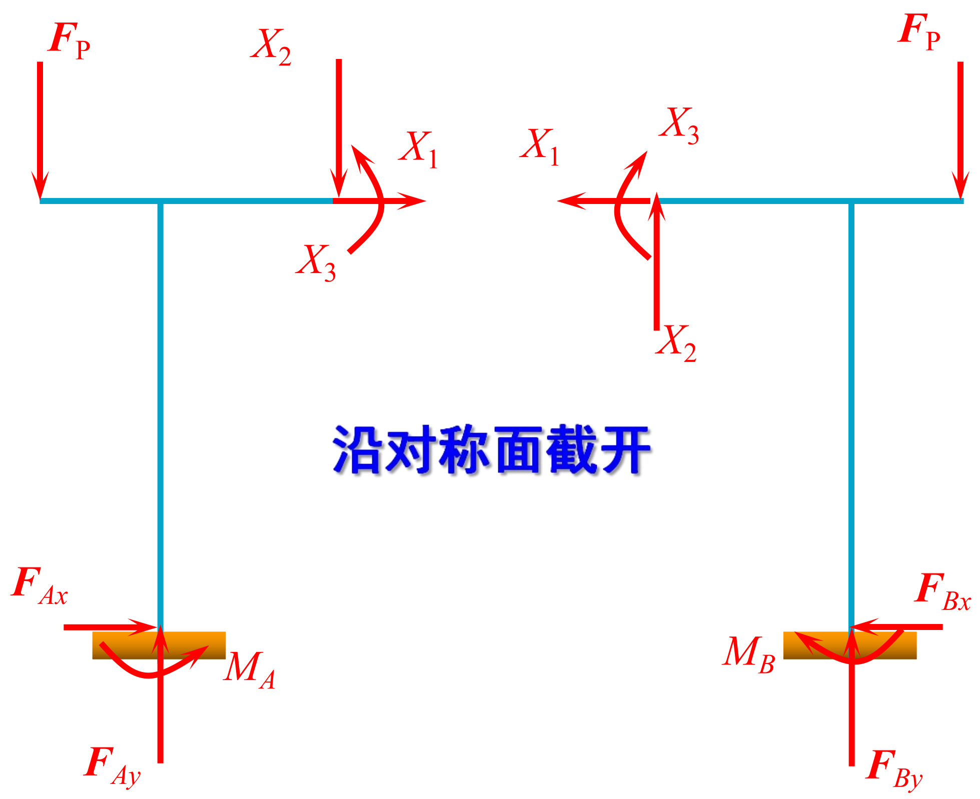
对称结构的对称变形



对称结构的对称变形



对称结构的对称变形

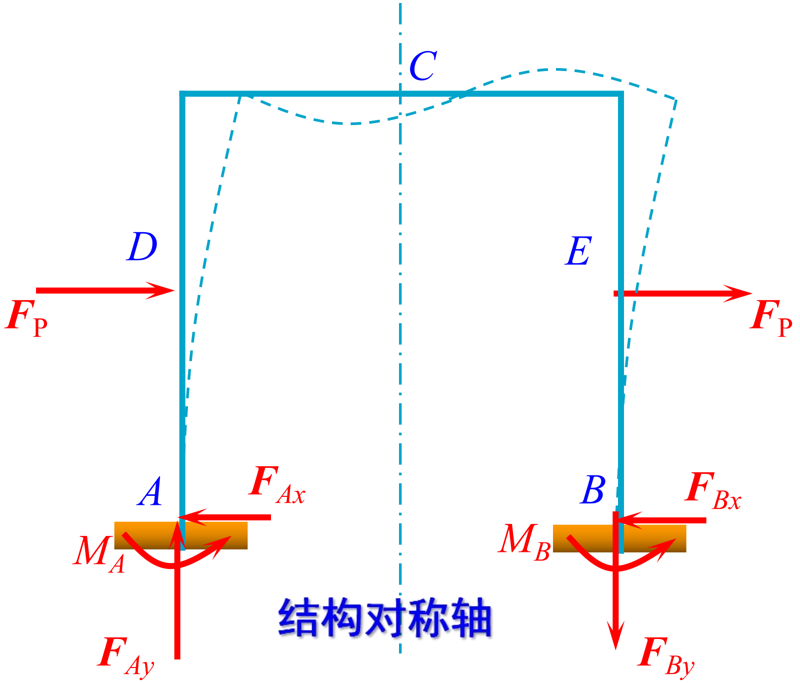


★ 对称结构的反对称变形

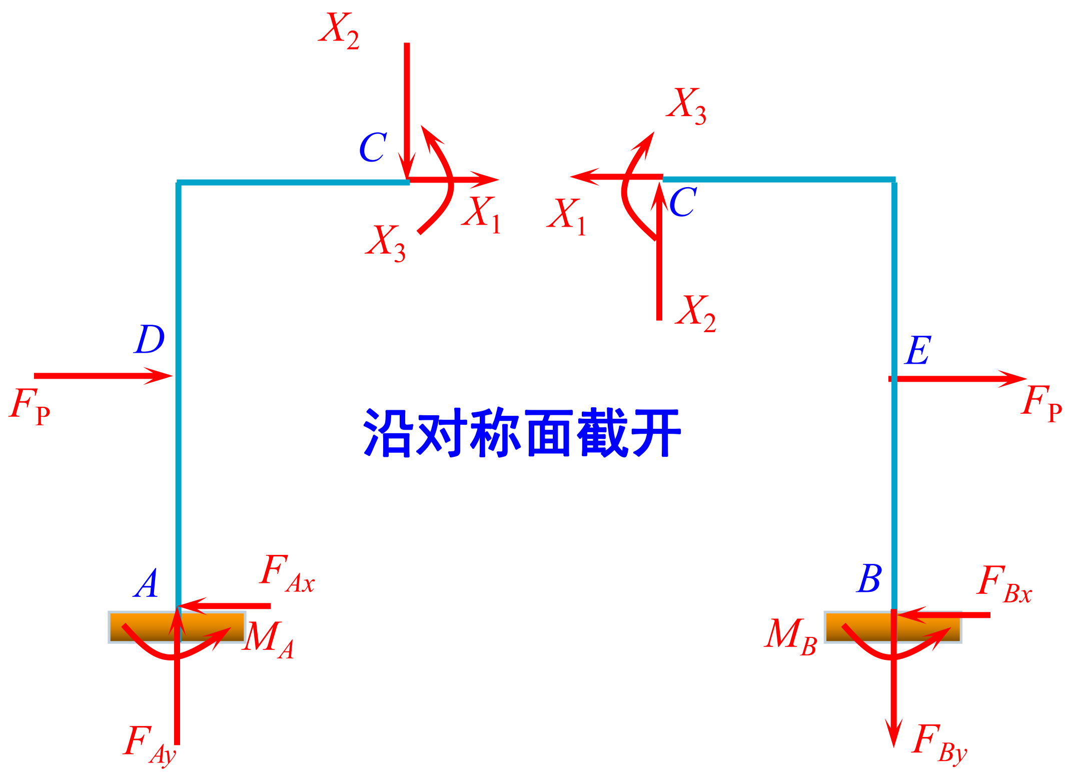
对称结构的反对称变形

当对称结构承受反对称载荷时，其上的约束力、内力分量以及位移都具有反对称的特征。

对称结构的反对称变形

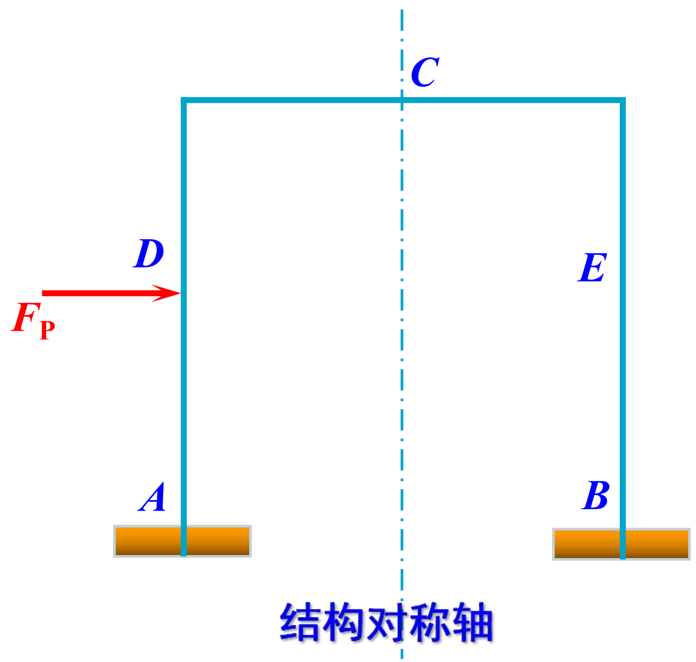


对称结构的反对称变形

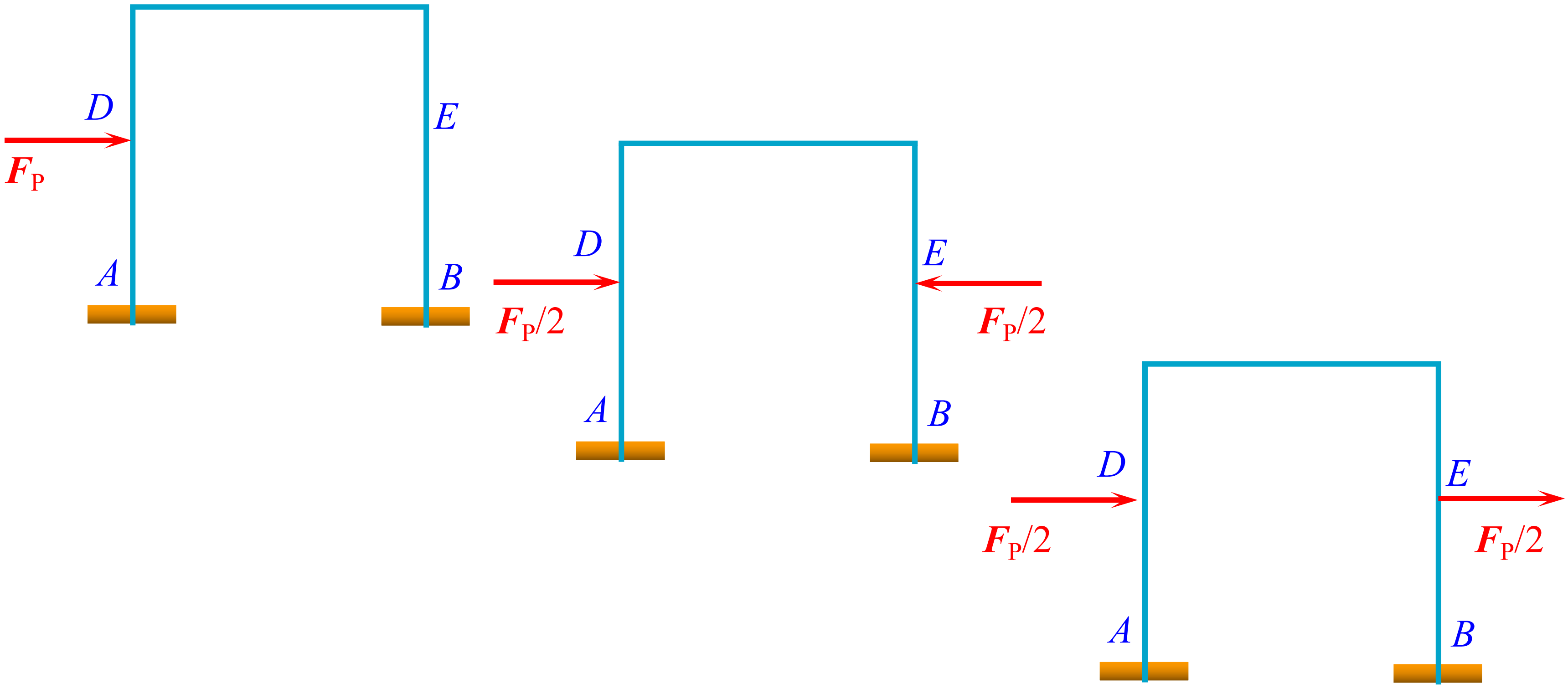


★ 对称结构的一般变形

对称结构的一般变形



对称结构的一般变形





■ 空间静不定结构的特殊情形



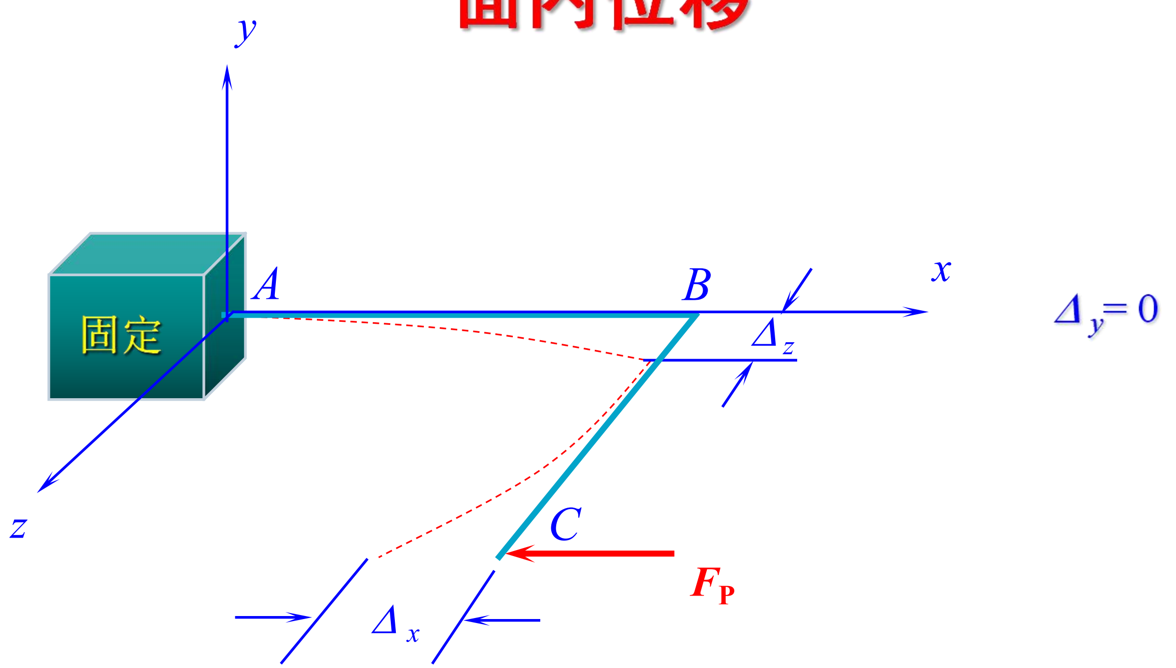
★ 面内位移

★ 面外位移

★ 空间静不定结构的特殊情形

★ 面内位移

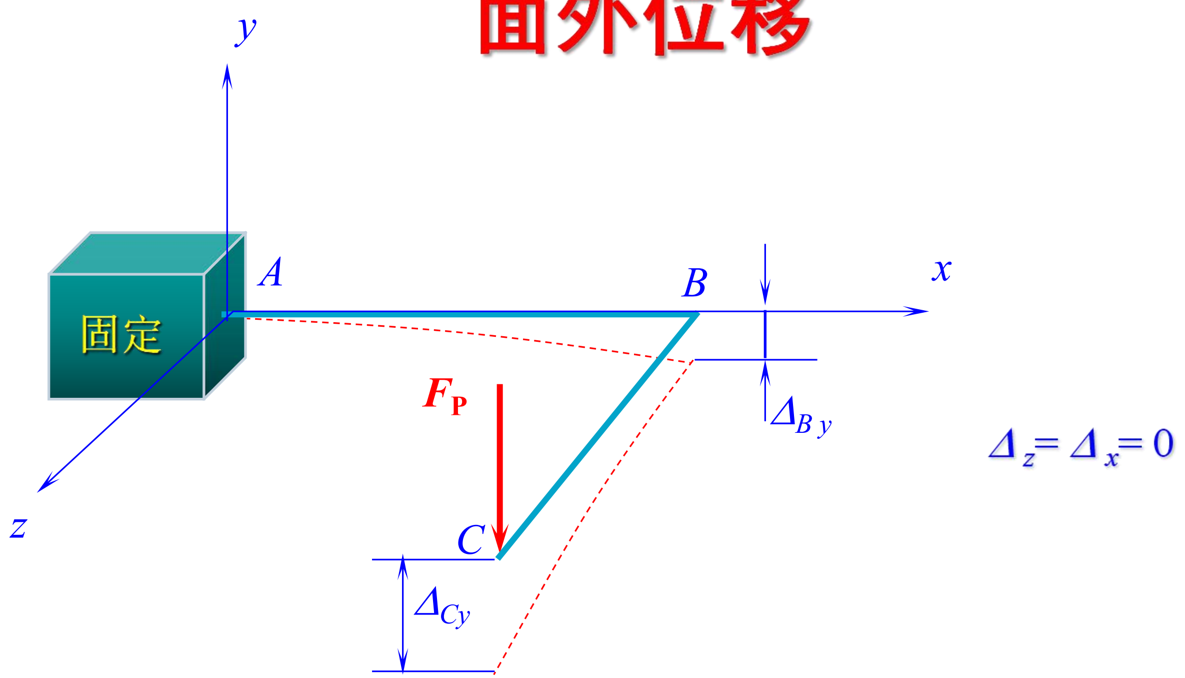
面内位移



当平面结构承受平面内载荷时，根据小变形的概念，结构只在自身的平面内发生位移，称为**面内位移**（displacement in plane）；不发生结构平面以外的位移，这种位移称为**面外位移**（displacement out of plane）。

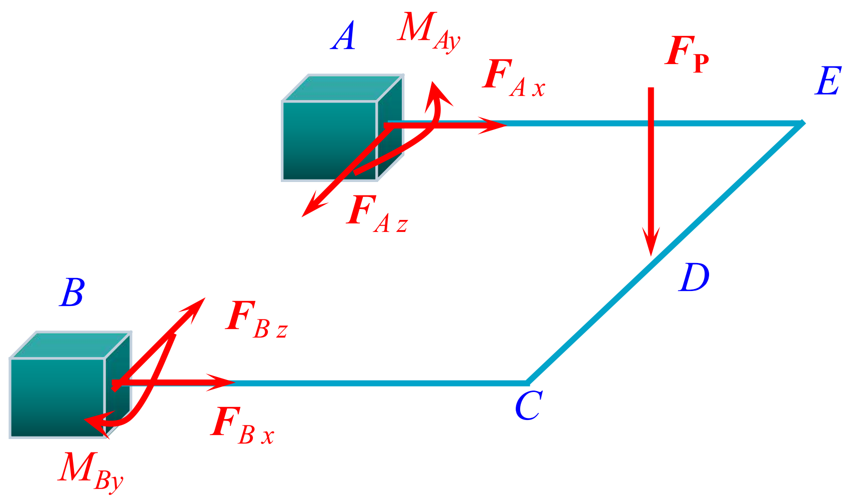
★ 面外位移

面外位移



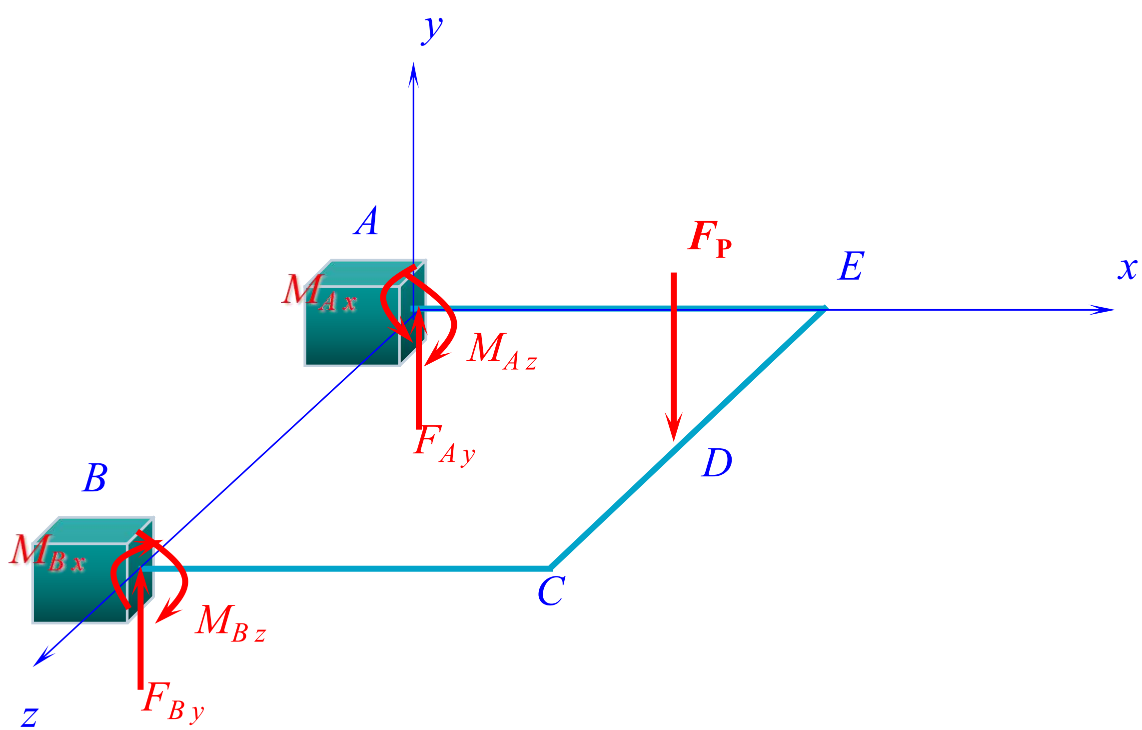
当平面结构承受垂直于其自身平面的载荷时，则将只产生面外位移而不产生面内位移。

★ 空间静不定结构的特殊情形

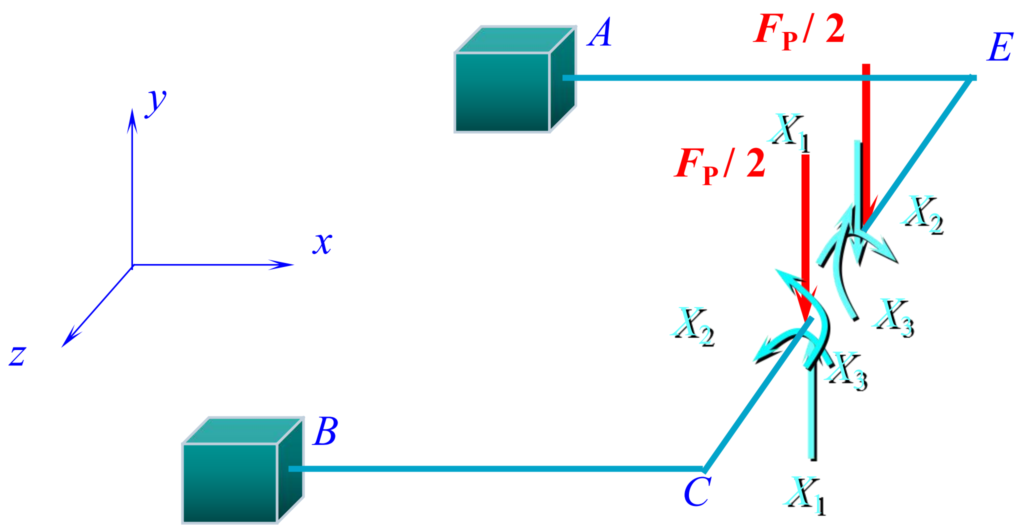


图中所示的两端固定的平面结构，在一般空间力系作用下为6次静不定。当载荷垂直于结构平面时，两个固定端共有6个非面内约束力。另有6个面内约束力为零，故3个面内力平衡方程自然满足。

图中所示的两端固定的平面结构，在一般空间力系作用下为6次静不定。当载荷垂直于结构平面时，两个固定端共有6个非面内约束力，另有6个面内约束力为零，故3个面内力平衡方程自然满足。



再应用对称性，从加力点一侧截开，其横截面上便只有对称的非面内的内力分量（未知弯矩）。因此，只要建立一个变形协调方程，即可求得未知弯矩，进而应用平衡方程解出全部未知约束力。



■ 深度研讨

★ 关于静定结构定义的再思考

★ 关于静定基本系统的不同选择

★ 关于对称性与反对称性分析的几点思考

★ 静不定系统的位移计算

★ 分析简化的再思考

★ 位移法求解静不定问题案例

★ 关于静定结构定义的再思考

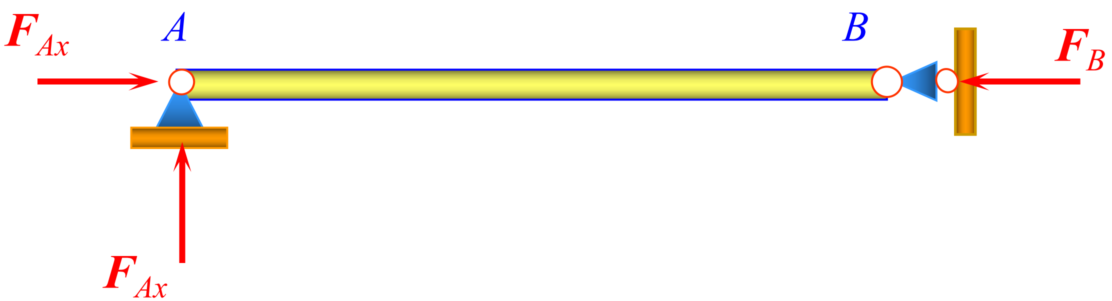
关于静定结构定义的充分性与必要性

结构静定——平衡方程的数目＝未知力个数

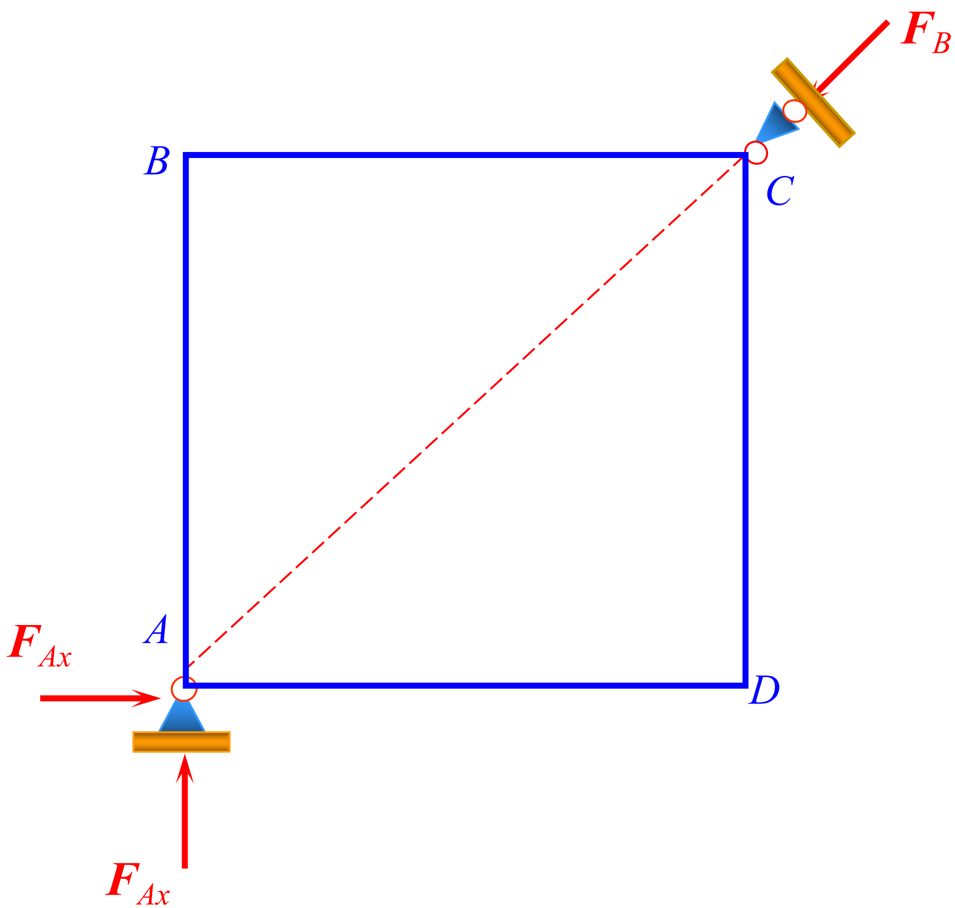
平衡方程的数目＝未知力个数——结构静定

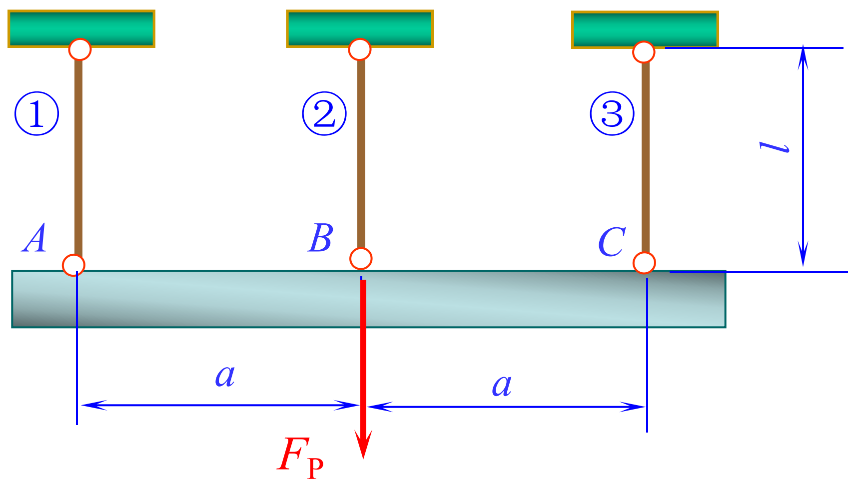
？

当平衡方程数目=未知约束力个数时，不一定是静定结构，有可能根本不是结构。

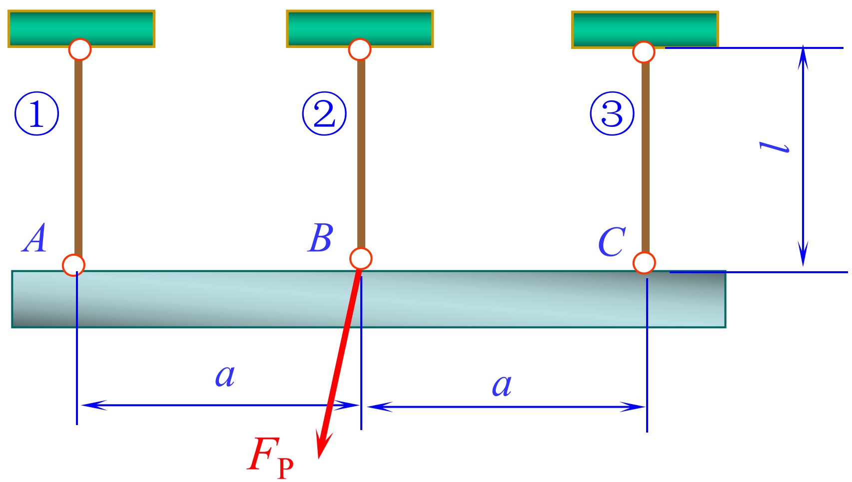


当平衡方程数目=未知约束力个数时，不一定是静定结构，有可能根本不是结构。





$a>l$



$a>l$

关于完全约束与不完全约束

所谓约束是指刚体在空间运动所受的限制。显然，约束状态与自由度有关：自由度大于零者称为不完全约束；自由度小于或等于零者称为完全约束。

关于完全约束与不完全约束

若令

N——自由度；

N_r——未知约束力个数；

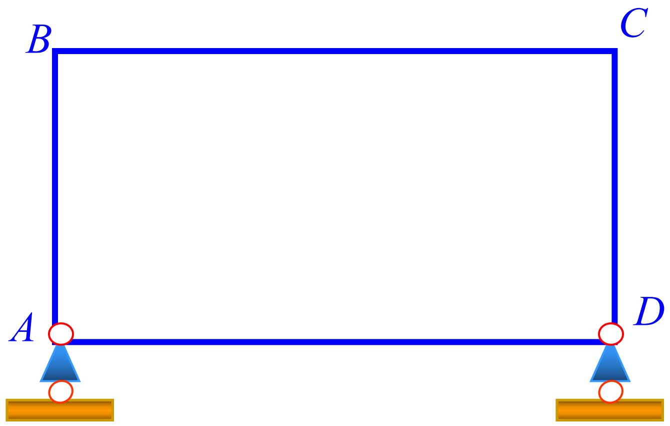
N_e——独立平衡方程数目。

则

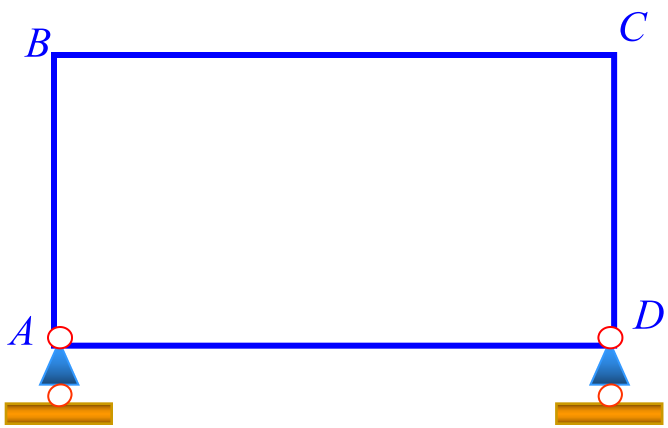
当$N_e > N_r$时，为不完全约束；

当$N_e = N_r$时，为完全约束，且为静定问题；
也可能为不完全约束，这时需要判断自由度；

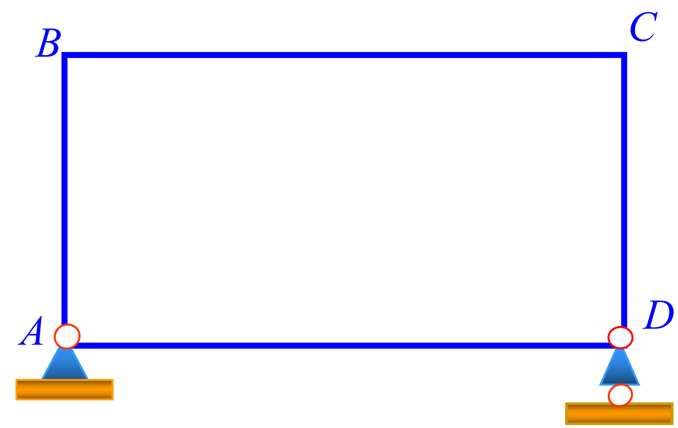
当$N_e < N_r$时，为完全约束，且为静不定问题。



$N_e > N_r$，不完全约束

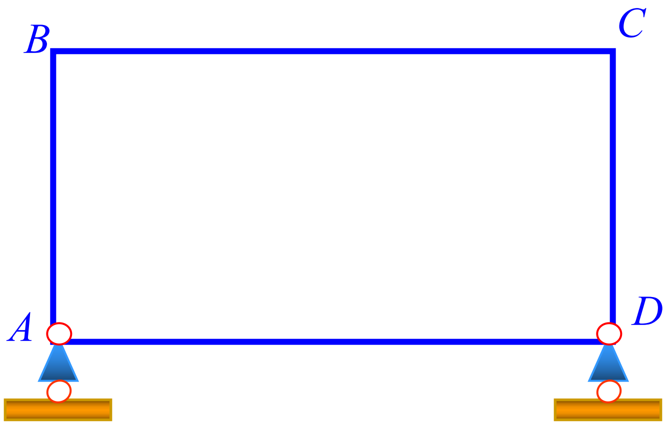


不完全约束

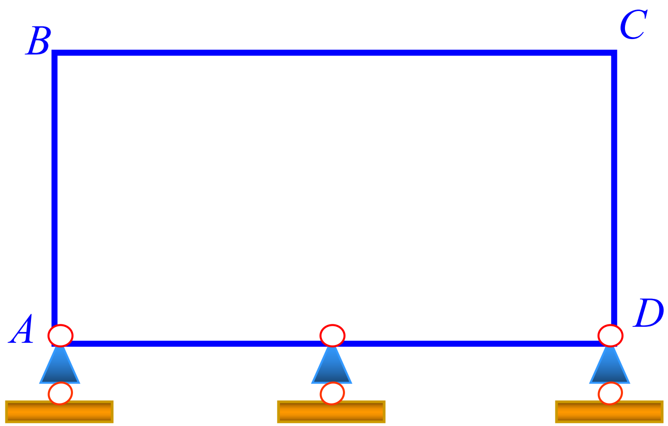


完全约束

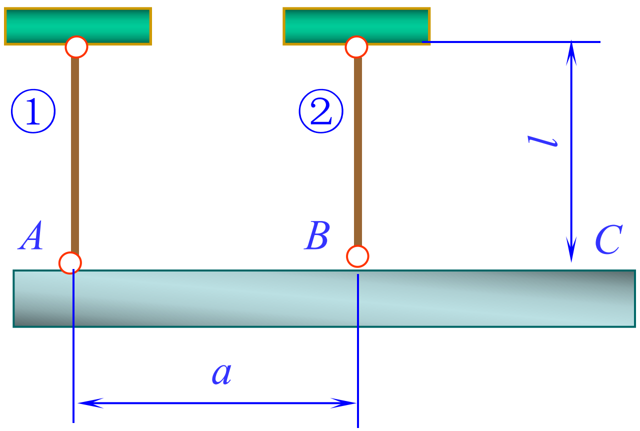
在不完全约束的刚体或刚体系统上，再加上若干约束就可将其变为完全约束，但不是施加任何形式的约束都可以达到这一目的。



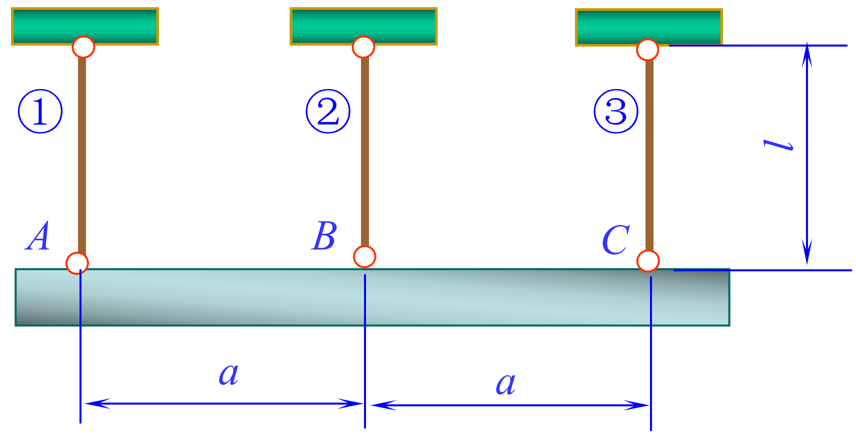
不完全约束



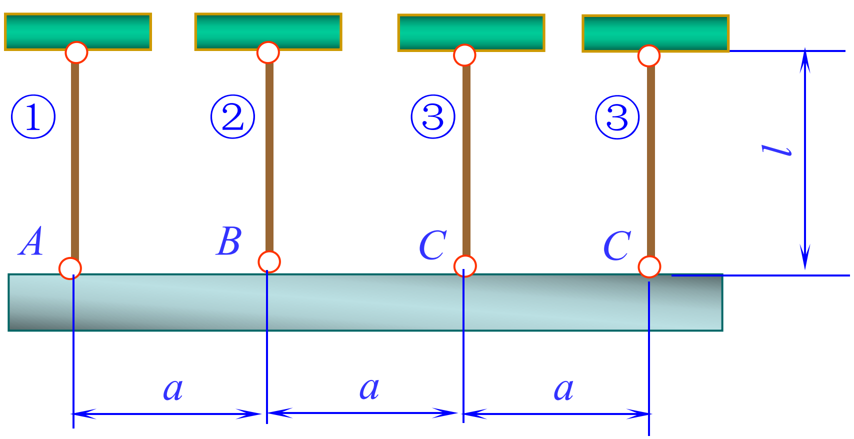
不完全约束



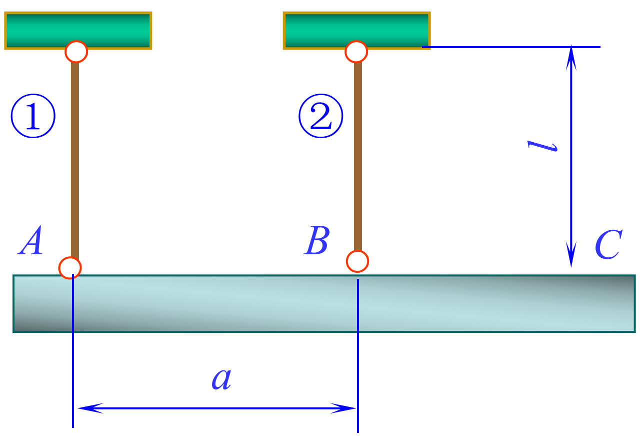
不完全约束



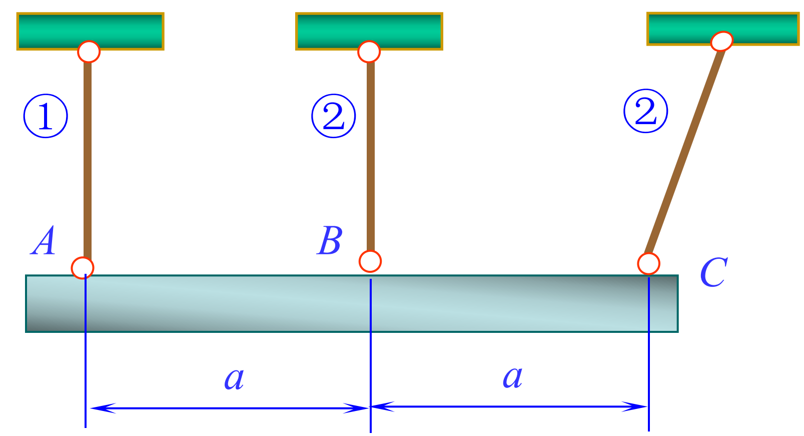
不完全约束



不管增加多少平行杆，
都是不完全约束



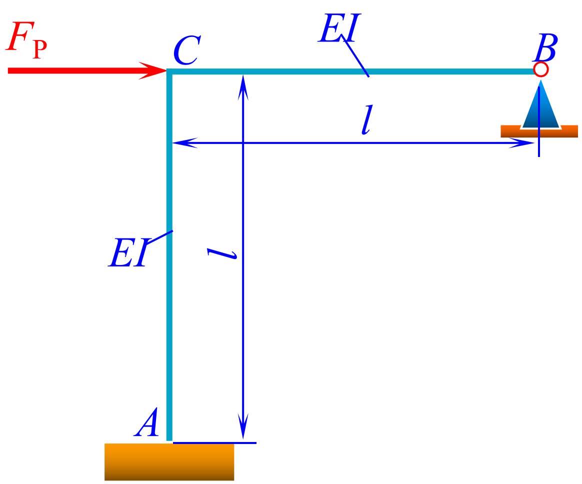
不完全约束

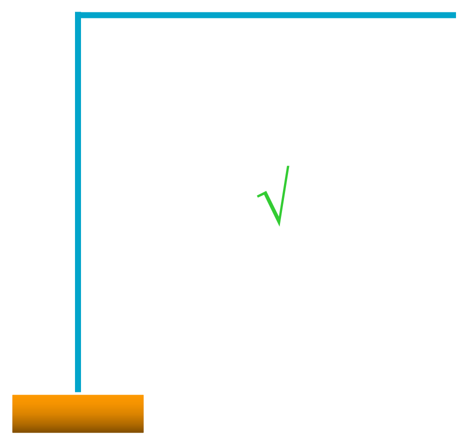


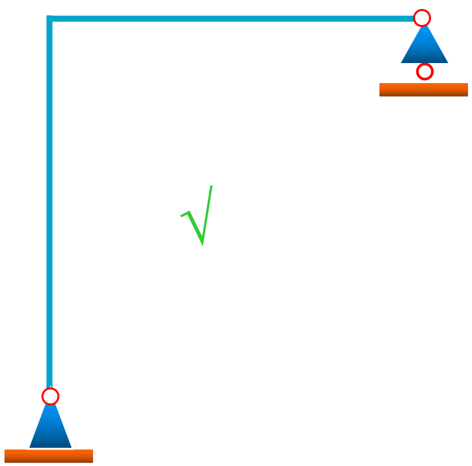
完全约束

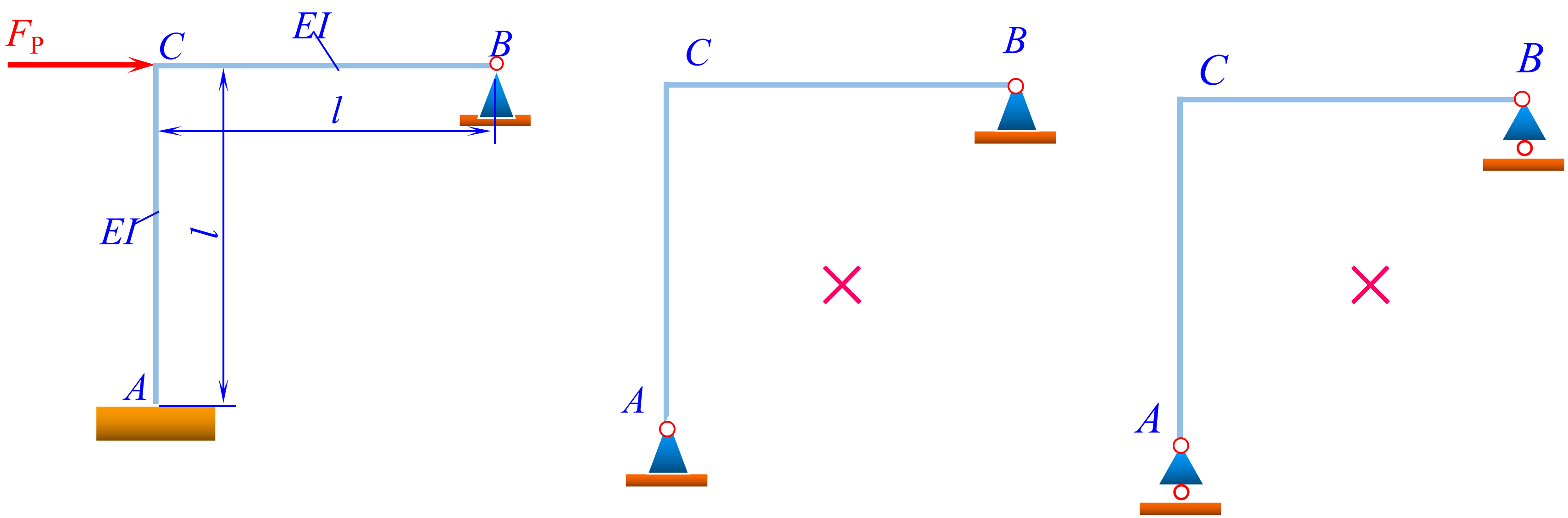
怎样判断完全约束与不完全约束？

★ 关于静定基本系统的不同选择


F_P
C
EI
B
l
EI
l
A

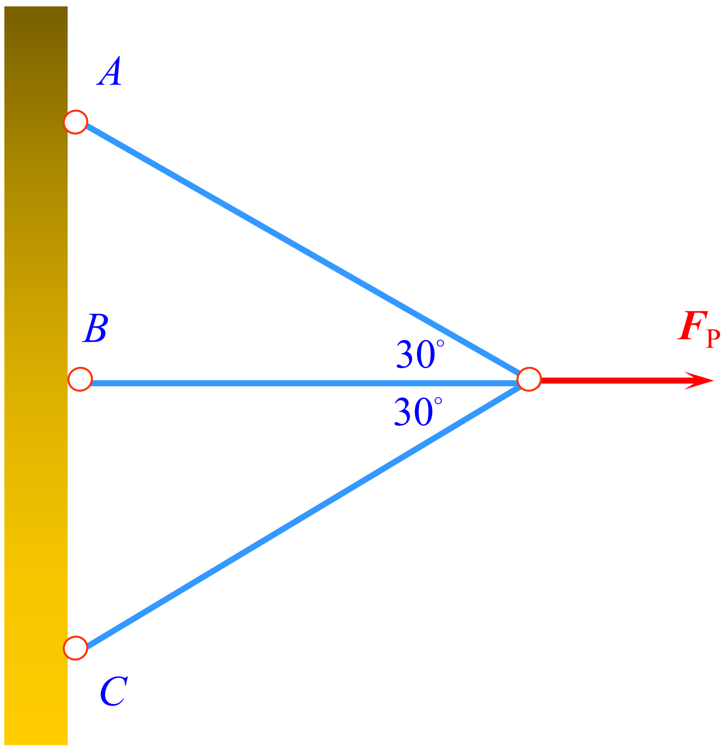

√

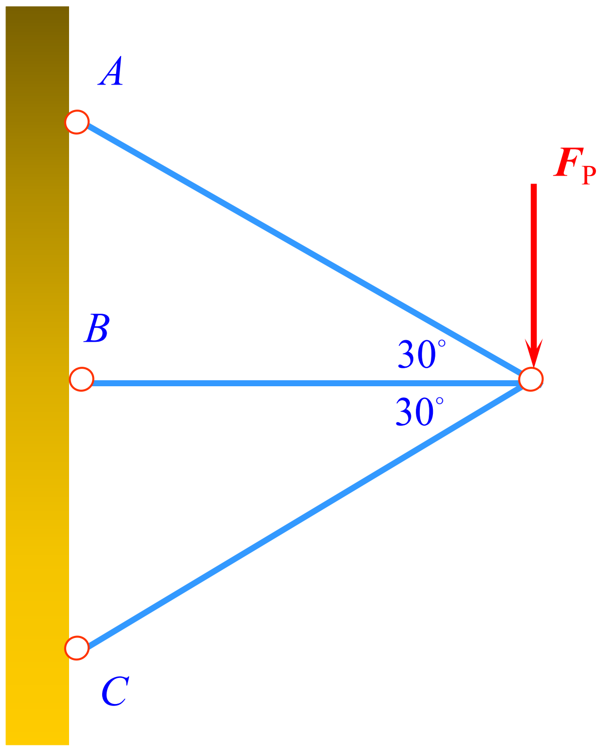

√


F_P
C
EI
B
l
EI
l
A
C
B
A
C
B
A

★ 关于对称性与反对称性分析的几点思考

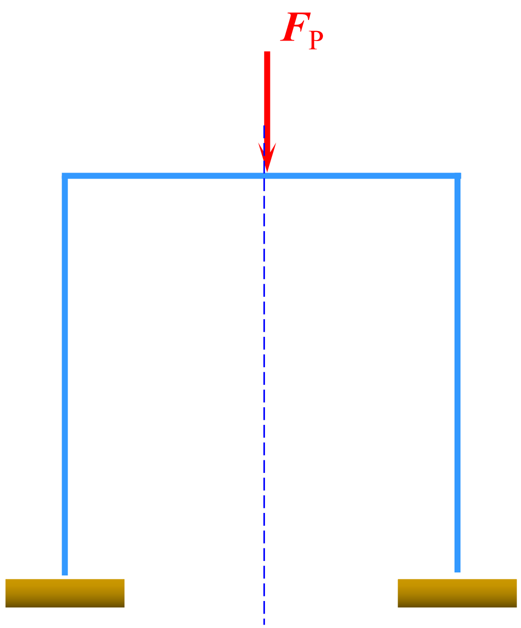
怎样判断对称与反对称

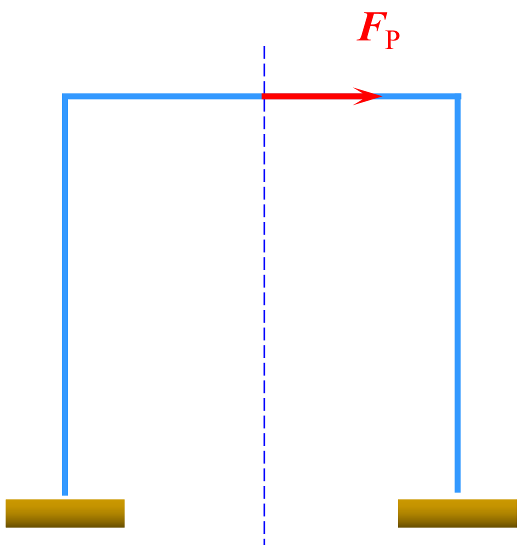




对称还是反对称？

对称还是反对称？

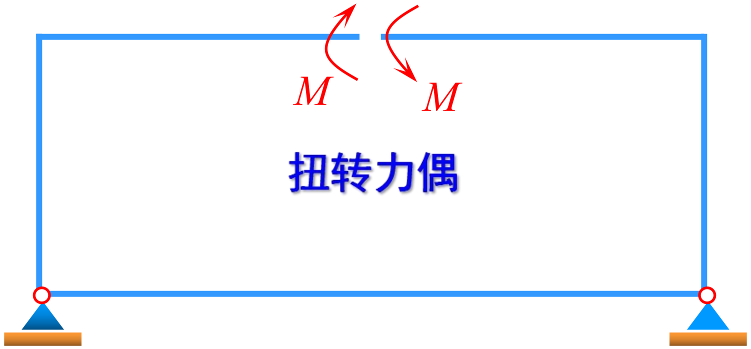




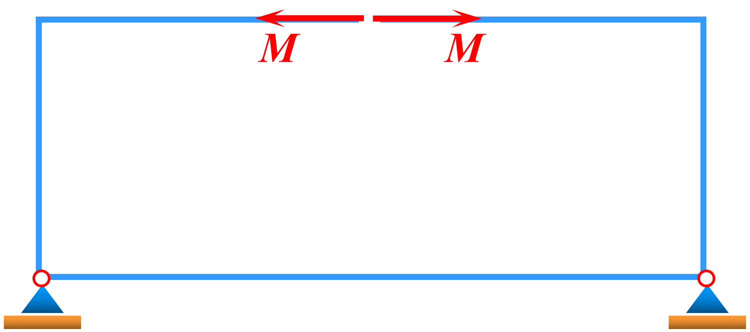
对称还是反对称？

对称还是反对称？

力偶对称性的判断



对称还是反对称？



对称还是反对称？

力偶对称性的判断

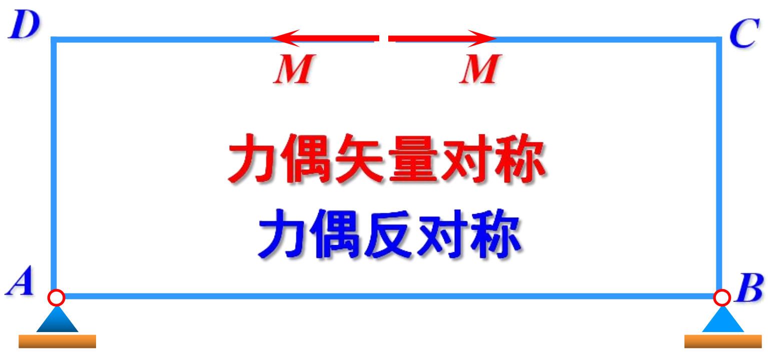
应用力偶矢量判断力偶的对称性与反对称性

矢量对称，则所对应的力偶反对称。

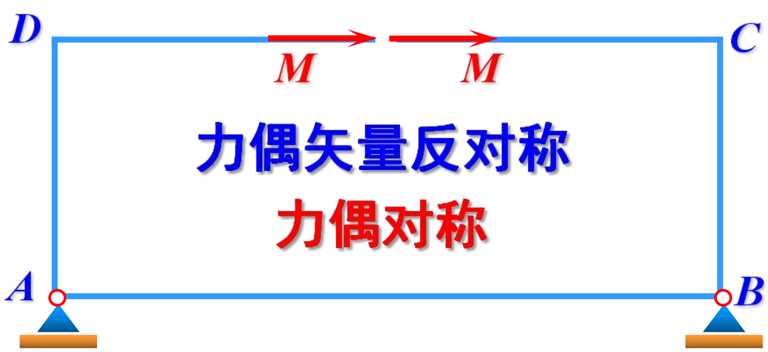
矢量反对称，则所对应的力偶对称。

力偶对称性的判断

**矢量对称，
则所对应的力偶反对称。**

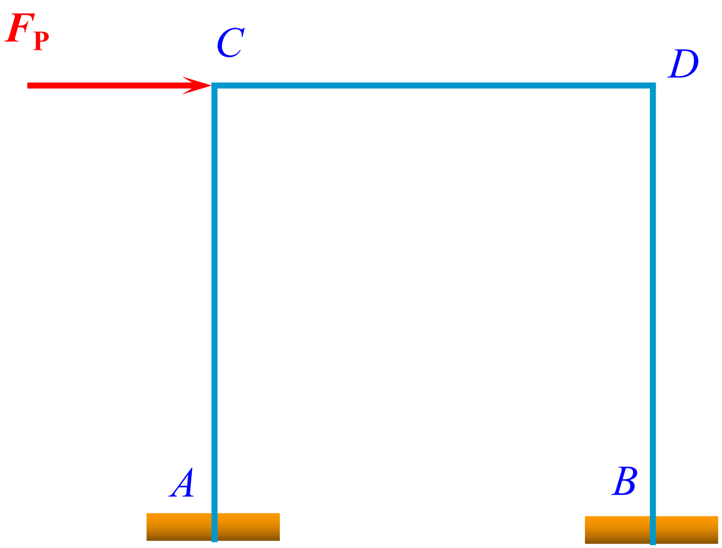


**矢量反对称，
则所对应的力偶对称。**



静不定系统的位移计算

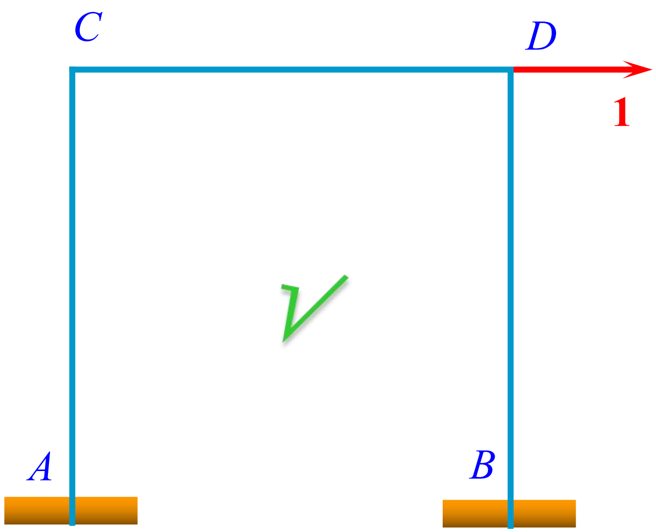
静不定系统的位移计算

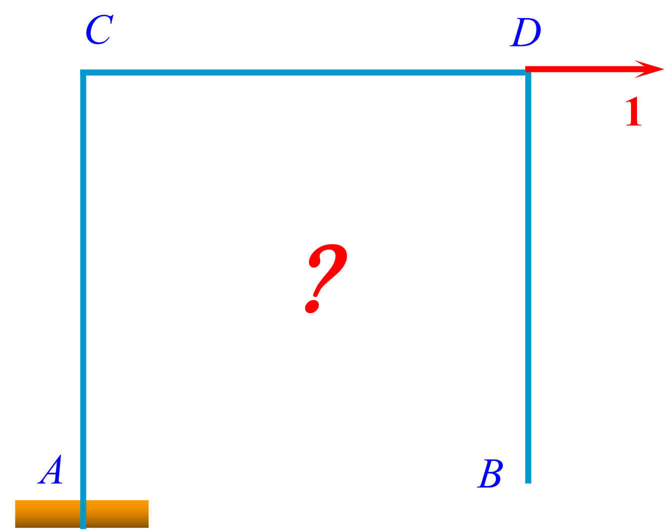


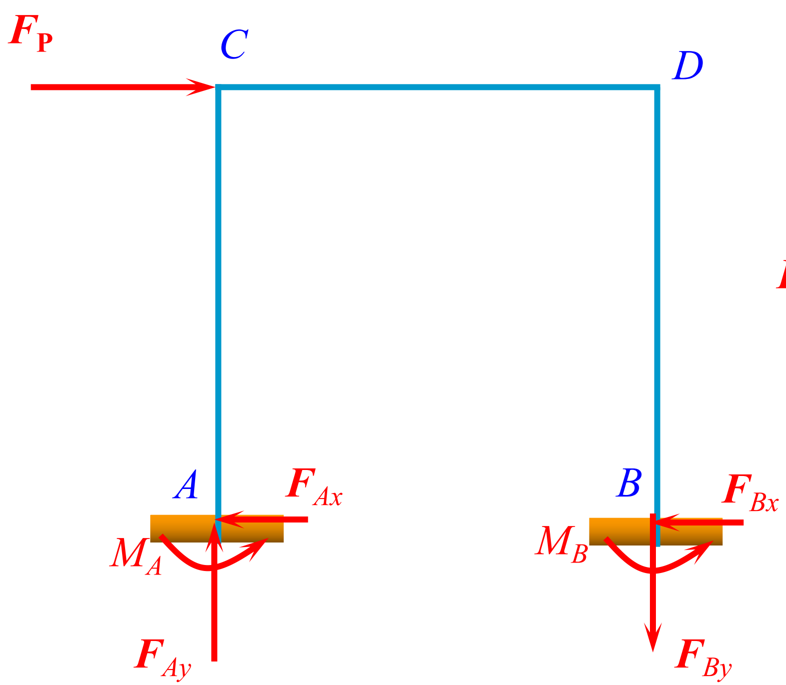
应用单位载荷法确定D点的水平位移，单位载荷系统怎样建立？

静不定系统的位移计算

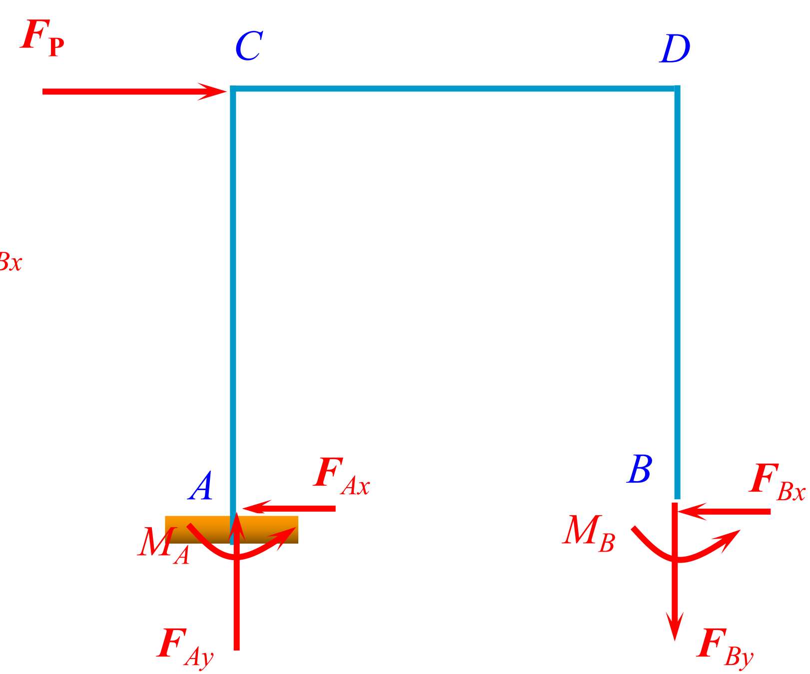
应用单位载荷法确定*D*点的水平位移，单位载荷系统怎样建立？



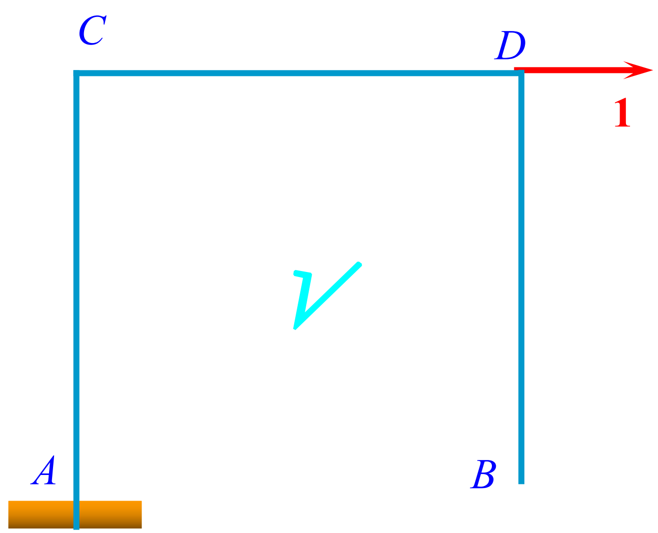




两个系统的受力和变形完全相同。

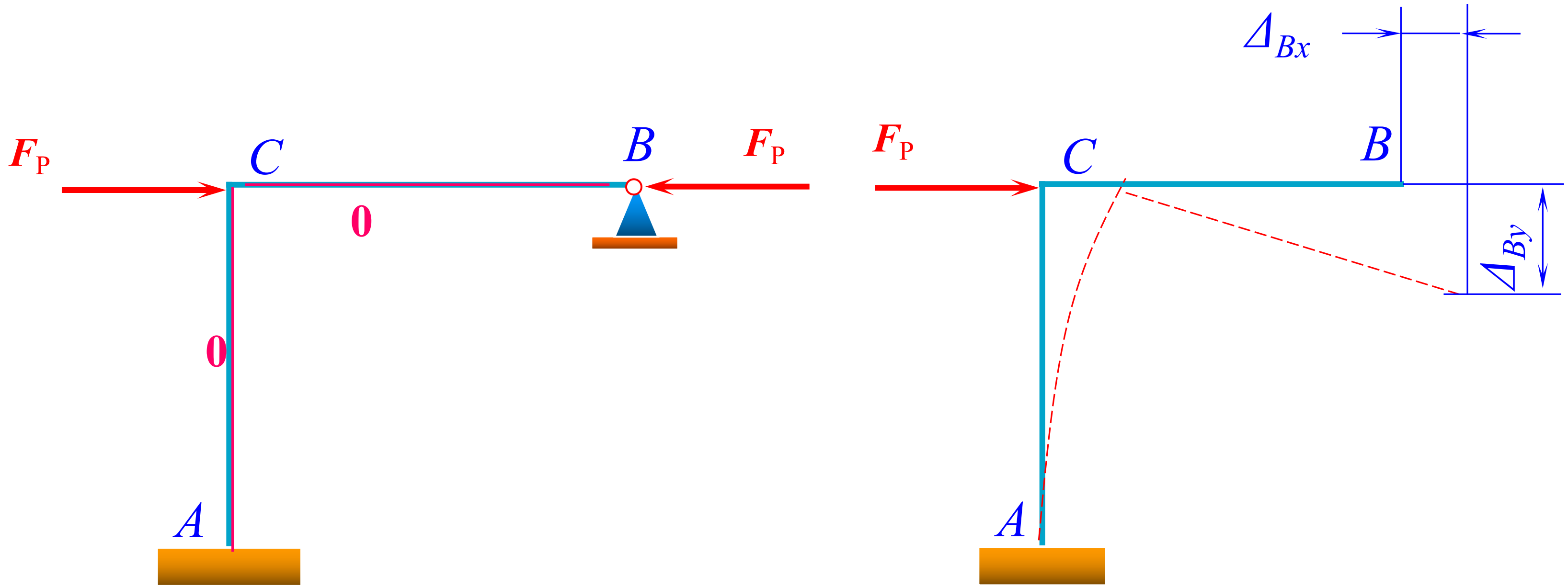


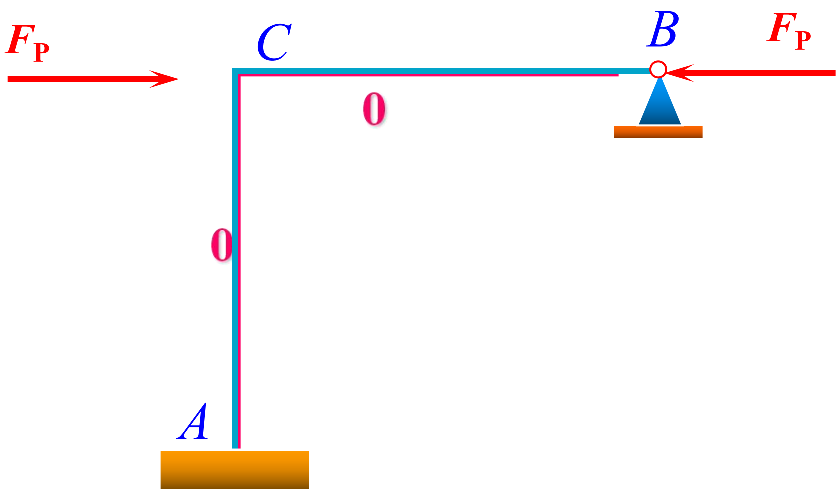
应用单位载荷法确定*D*点的水平位移，单位载荷施加在与静不定系统相关的静定系统上是正确的。



研讨问题 1

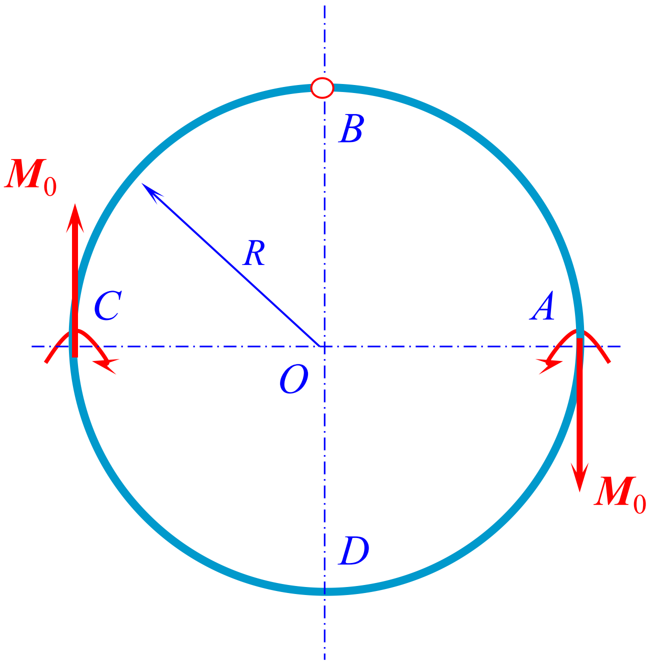
一个似乎“怪异”的结果!

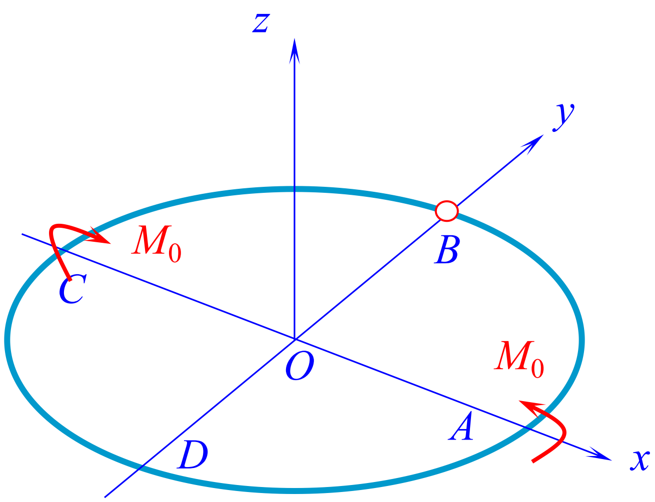




1、这个结果到底是正确的还是错误的？
2、如果是正确的，怎样证明是正确的？
3、如果是错误的，错在哪里？

研讨问题 2





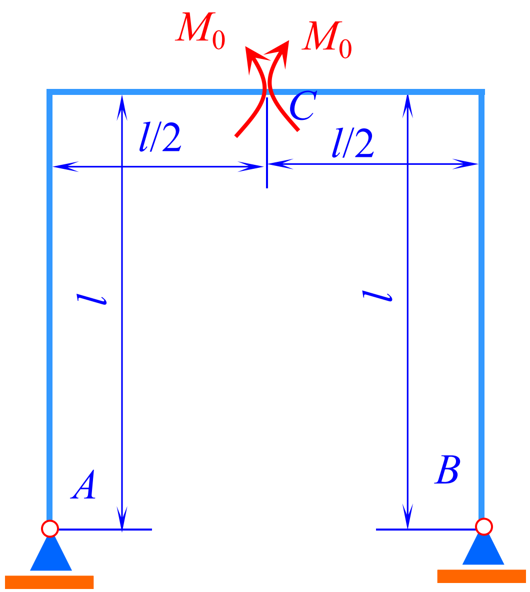
平面问题还是空间问题？
载荷对称还是反对称？
中间铰处有几个约束力？
怎样确定D截面上的内力分量？

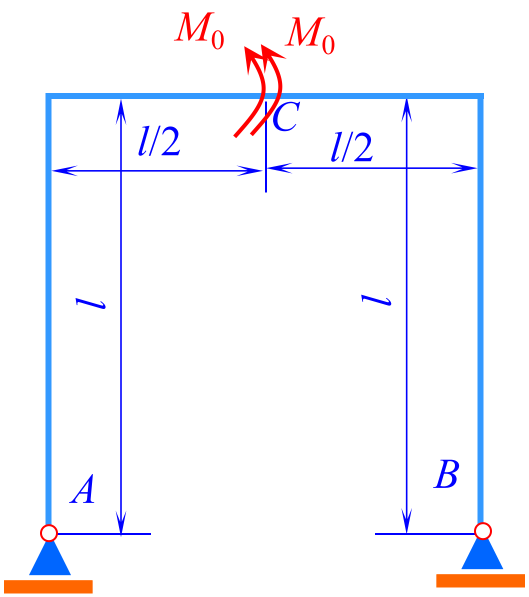
研讨问题 3

以平面刚架为例，应用力法和正则方程论证：

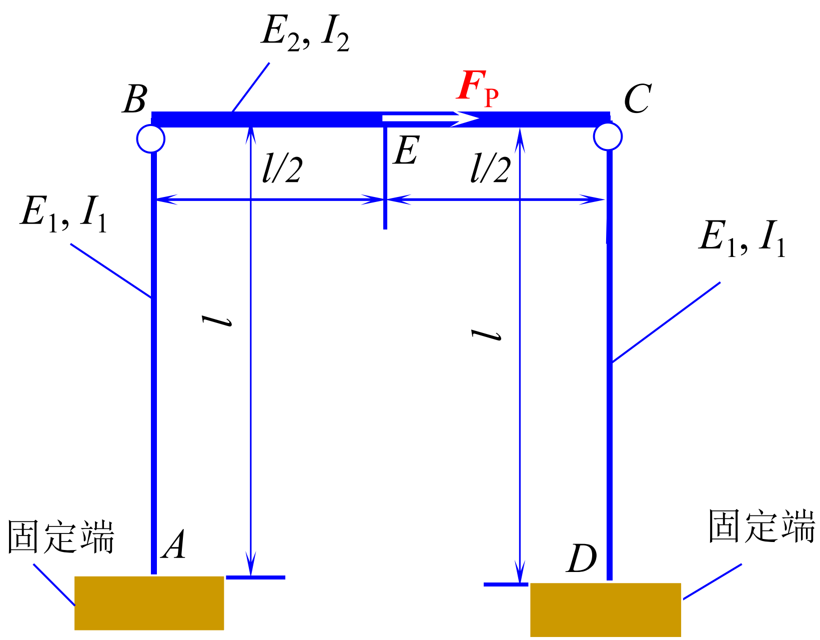
对称结构在对称载荷作用下，其约束力、内力、变形和位移都是对称的；

对称结构在反对称载荷作用下，其约束力、内力、变形和位移都是反对称的。





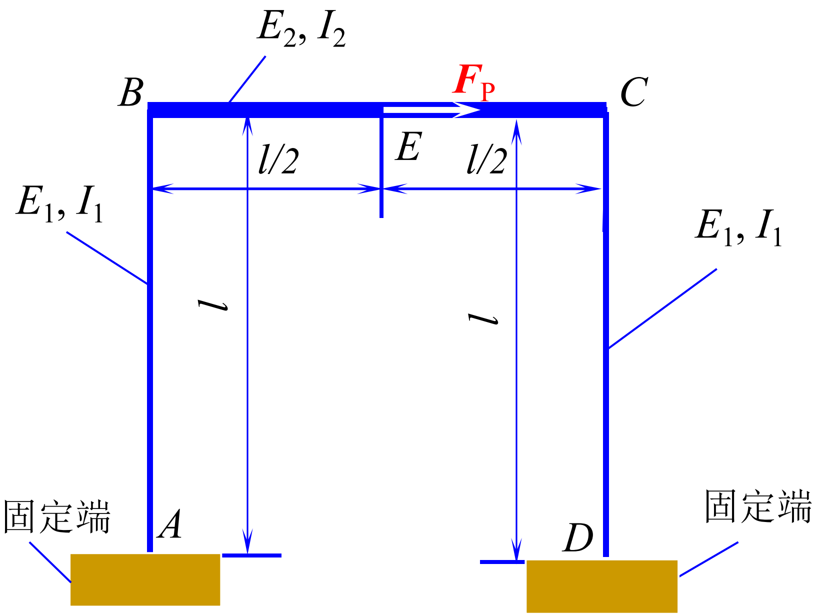
研讨问题 4



平面刚架的支承和受力如图所示。

1. 判别刚架是静定还是静不定的；如果是静不定的，请确定静不定次数；
2. 确定刚架的全部约束力；
3. 讨论：当$E_1I_1=\infty$，或 $E_2I_2=\infty$时，刚架的约束力将如何变化；
4. 画出刚架的内力图；
5. 画出刚架变形后的大致形状

研讨问题 5

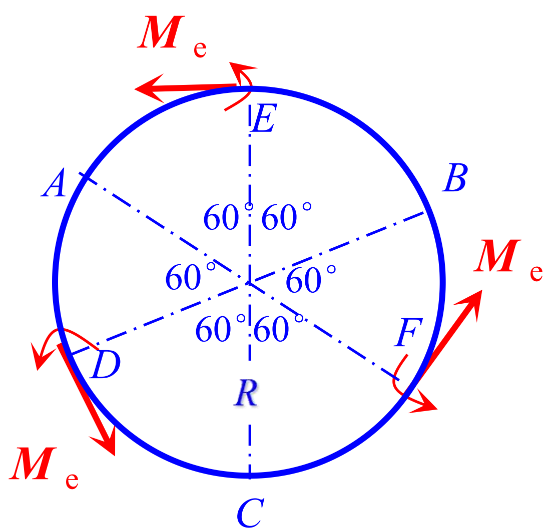


两种平面刚架的支承和受力分别如图所示。

1. 判别刚架是静定还是静不定的；如果是静不定的，请确定静不定次数；
2. 确定各刚架的相当系统，列出求解未知量的正则方程，解出全部未知量；
3. 画出全部内力图；
4.画出刚架变形后的大致形状。

研讨问题 6

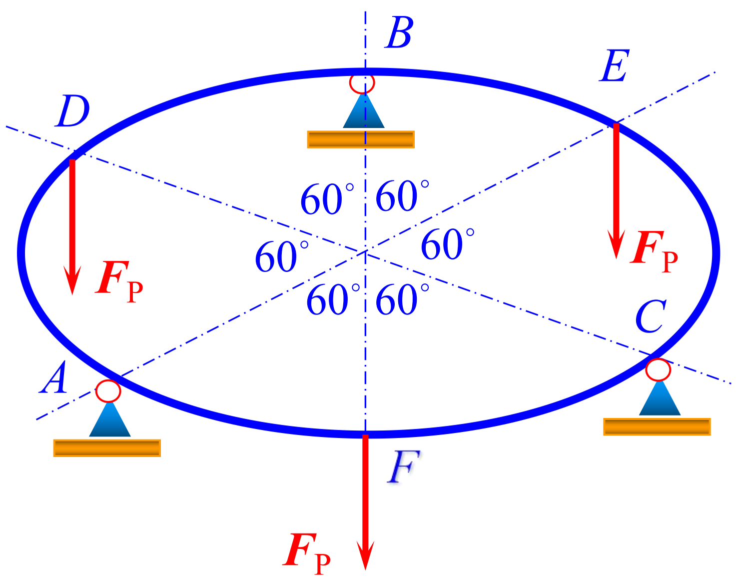
确定A、B、C截面上的内力分量

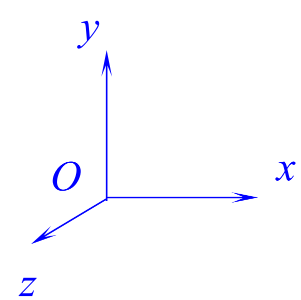


结构有没有对称面?

载荷有没有对称面?

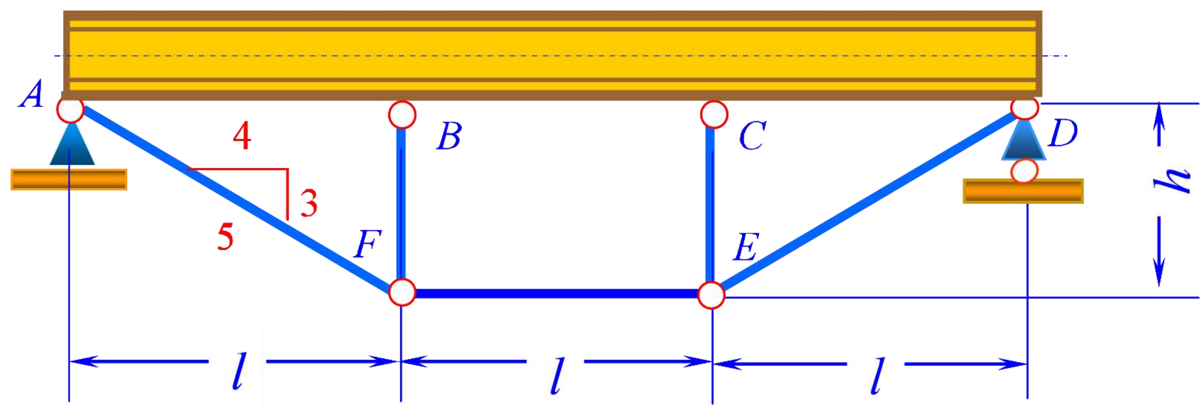
研讨问题 18 (难度系数15)





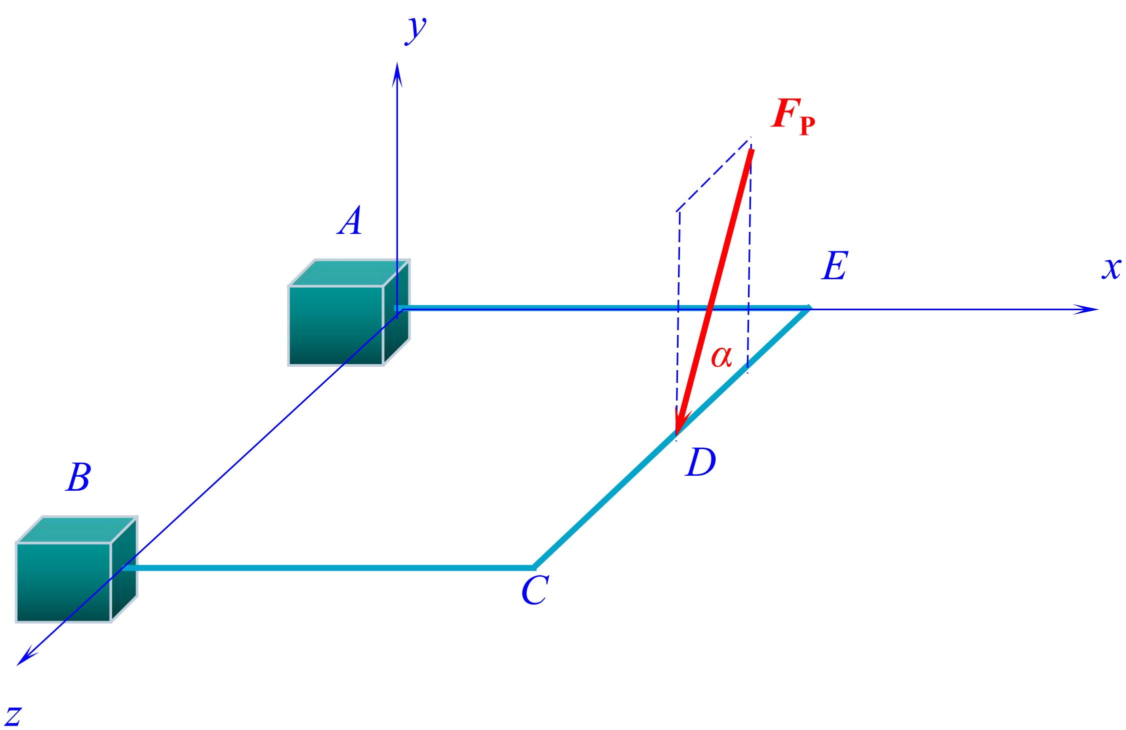
位于Oxz平面内、半径R的闭合圆环在A、B、C三支承在同一平面上，圆环在D、E、F三点承受垂直于圆环平面的集中力，数值均为F_P。圆环杆的弯曲与扭转刚度分别为EI和GI_p。试求支承处杆横截面上的弯矩。

研讨问题 19（难度系数20）



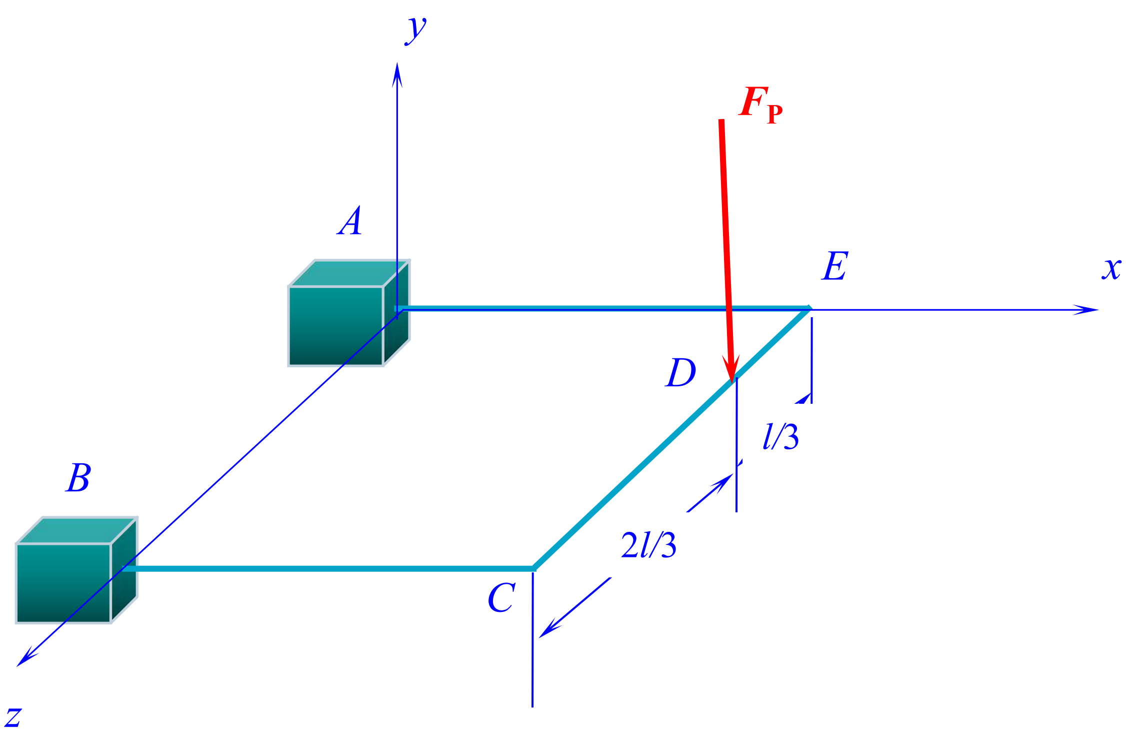
图示的结构中，主梁 为No.20b的普通热轧工字钢，下面用5根杆件加固，*B*、*C*、*E*、*F* 处均为铰链约束。图中，l=2 m；各杆的横截面面积均为 A=80×11－^{4} m^{2}，材料的弹性模量E=210 GPa 。若装配后*EF*杆 的温度升高60° C，试求：在*EF*杆 内所产生的轴力。

研讨问题 20 （难度系数10）



这是一个空间静不定结构，外力的作用线平行于yz平面内，且作用在*CE*杆的中点*D* 。研究怎样通过简化的方法求得D截面的内力分量。

研讨问题 21 （难度系数15）



这是一个空间静不定结构，外力的作用线平行于yz平面内，且作用在D点。研究怎样通过简化的方法求得D截面的内力分量。

能力训练 I

11－I－1

11－I－3

11－I－5

能力训练 II

11－II－1

11－II－2



再认知测试

11—2



谢谢大家