从纷繁的表象中揭示关键的核心内涵

——“应力状态分析”的第 2 堂精讲课

5 月 7 日上午 3、4 节课，是关于应力状态分析的第 2 堂精讲课。

应力状态分析的第 1 堂精讲课，讲授了什么是应力状态、怎样表述一点的应力状态、以及一点应力状态的解析表达。

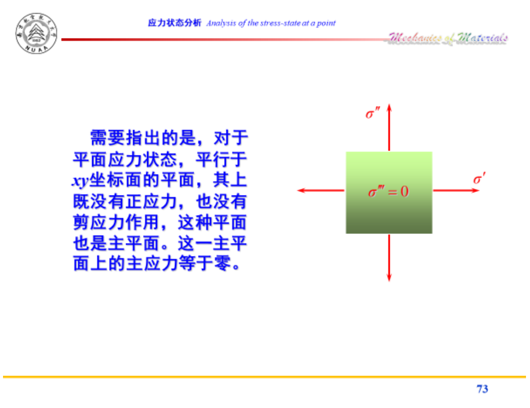
在第 2 堂精讲课开始，李老师首先引导学生回顾从一点应力状态的解析表达中可以看出：

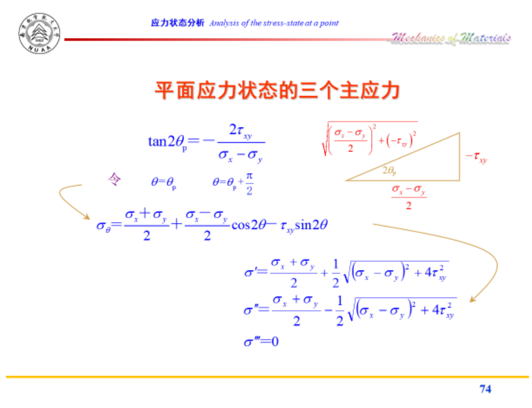
过同一点不同方向面上的应力各不相同；

方向面上的正应力和剪应力是 θ 的连续函数；

所有方向面上的正应力和剪应力中必然存在极值。

进而引出：正应力的极值称为主应力，而剪应力的极值分为面内最大剪应力和过一点的最大剪应力。随后，李老师类比主惯性矩的概念，给出主应力的第一个概念；从极值的角度给出惯性矩的第二个概念。**并强调：**对于平面应力状态，虽然通过函数求导只得到两个主应力，但平行于 xy 坐标面的平面，其上既没有正应力，也没有剪应力作用，这种平面也是主平面。这一主平面上的主应力等于零。

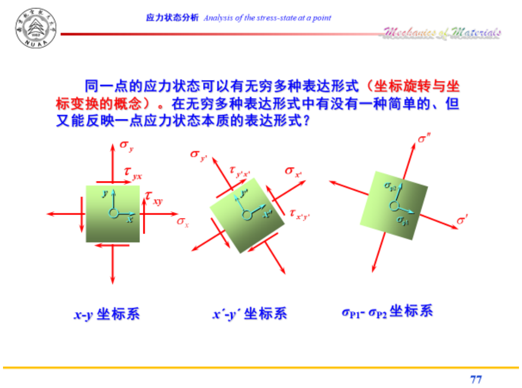


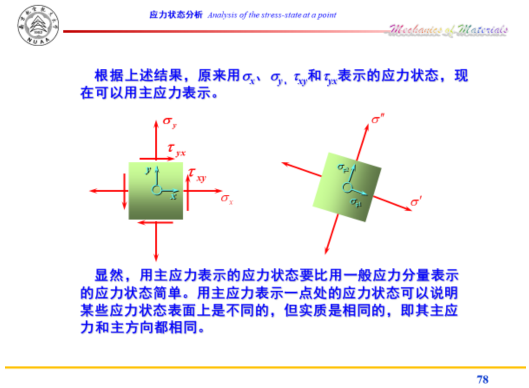


主应力在应力状态分析、一般应力状态下强度设计准则建立方面至关重要。根据主应力的大小与方向可以确定材料何时发生失效或破坏，确定失效或破坏的形式。因此，可以说主应力是反映应力状态本质的特征量。

介绍完主应力的概念，再来看一点应力状态的表达形式。同一点的应力状态可以有无穷多种表达形式，有没有一种简单的、但又能反映一点应力状态本质的表达形式呢？当然有，那就是用主应力表示的应力状态。用主应力表示一点处的

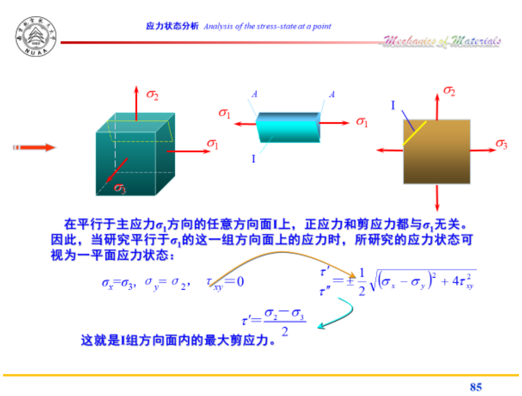
应力状态，不仅形式简单，而且**可以说明某些应力状态表面上是不同的，但实质是相同的**，即其主应力和主方向都相同。

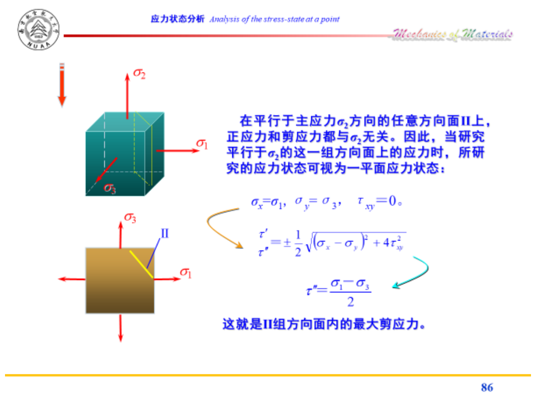


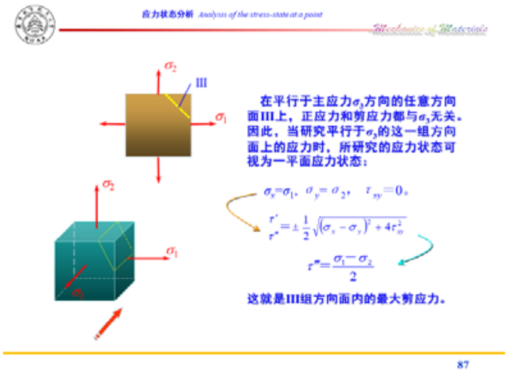


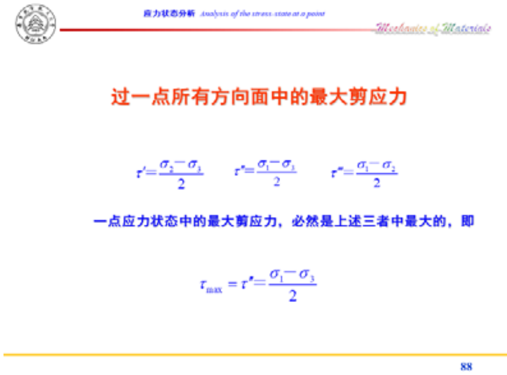
参照通过极值求主应力的方法，李老师请廖灯亮同学到讲台讲解面内最大/最小剪应力这一部分。进而追问：面内最大和最小剪应力是过一点的所有方向面中剪应力的最大和最小值吗？

之前所求得的面内最大剪应力，仅仅是对垂直于 xy 坐标面的方向面而言，不一定是过一点的所有方向面中的最大剪应力。为此，考察微元三对面上分别作用着三个主应力（$\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3\neq0$）的应力状态，分别研究平行于主应力 σ_1、σ_2 和 σ_3 方向的三组方向面。在平行于主应力 σ_1 方向的任意方向面 I 上，正应力和剪应力都与 σ_1 无关。因此，当研究平行于 σ_1 的这一组方向面上的应力时，所研究的应力状态可视为一平面应力状态；对于平行于主应力 σ_2 和 σ_3 方向的方向面可以类似分析，得到这三组方向面内的最大剪应力。从这个分析中可以看出：面内最大剪应力不一定是过一点的所有方向面中的最大剪应力。







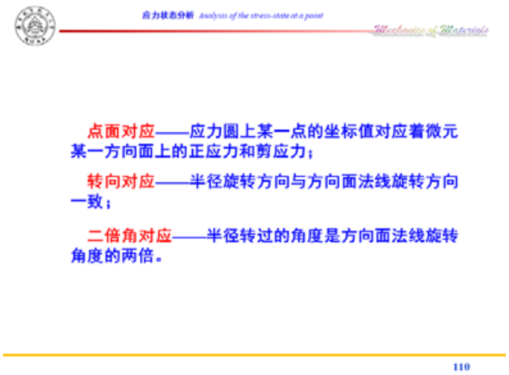


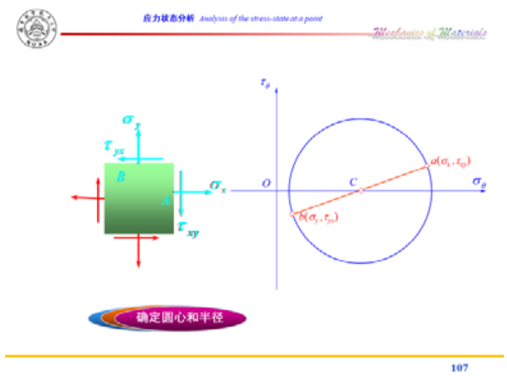
接下来进入从解析分析方法到图解分析法的转折。李老师请周欣蕾同学到讲台写出平面应力状态中任意方向面上正应力与剪应力的表达式，并问：从这个表达式还可以看出什么？所有同学动笔推导，发现得到一个圆方程。进一步问：圆心和半径分别为多少？如何画这个圆？是在坐标系中找到圆心，然后以圆方程中的半径作圆吗？按照分段实施计划，这部分内容由老师和学生同讲，于是李老师请朱星森同学到讲台讲解应力圆的画法。

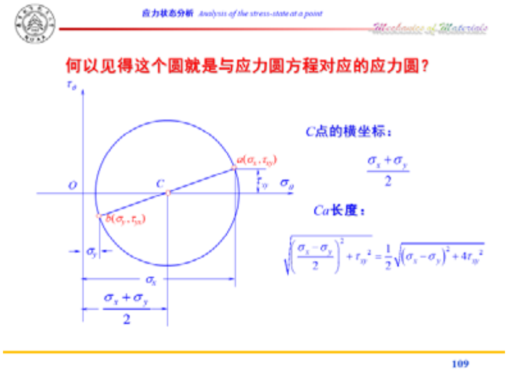
朱星森先画出一平面应力状态及以 σ_θ 为横轴，τ_θ 为纵轴的坐标系，讲解了二者之间的 3 种对应关系：点面对应、转向对应、二倍角对应。利用这 3 种对应关系，给出了应力圆的画法：

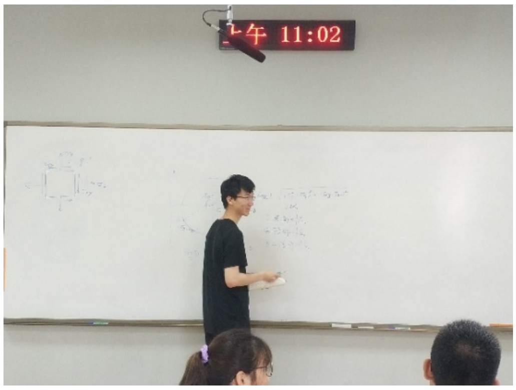
首先，建立$O-\sigma_\theta\tau_\theta$坐标系，其中$\sigma_\theta$为横坐标；$\tau_\theta$为纵坐标。然后由面找点——即根据微元一对相互垂直面上的正应力和剪应力，在$O-\sigma_\theta\tau_\theta$坐标系中找到相应的两点，两点连线，其与横轴的交点即为应力圆的圆心，两点连线即为应力圆的直径。

那么，何以见得这个圆就是与应力圆方程对应的应力圆？朱星森同学随后证明了这种画法得到的圆心和半径与应力圆方程是一致的。





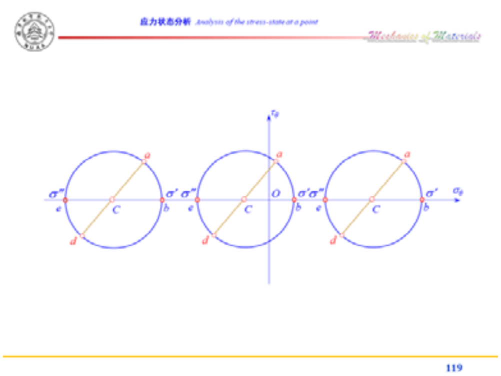


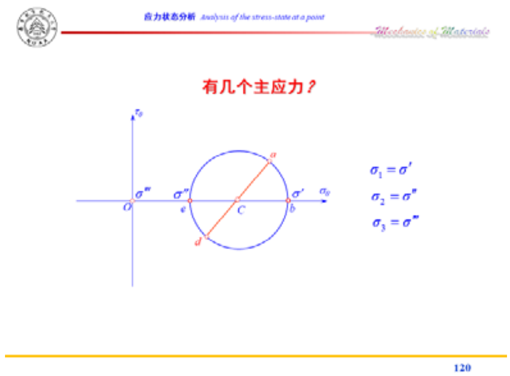


那么应力圆中包含了哪些信息呢？这个问题考察学生举一反三的能力，由罗发程同学到讲台上为大家讲解。

罗发程同学在朱星森同学所画平面应力状态及应力圆上为同学讲解：

从应力圆上可以找到主方向、面内最大剪应力、两个主应力 σ'和 σ''。李老师追问：只能找出两个主应力嘛？下面的同学补充：原点那个地方也是主应力，$\sigma'''=0$！范老师也对罗发程同学进行启发引导，通过 σ'和 σ''可以作出一个应力圆吧？那通过 σ'和 σ'''、σ''和 σ'''可以分别作出应力圆来吧？罗发程同学受到启发作出了另外两个应力圆，并找到这两个应力圆中的面内最大剪应力，通过应力圆说明：面内最大剪应力不一定是过一点的最大剪应力。

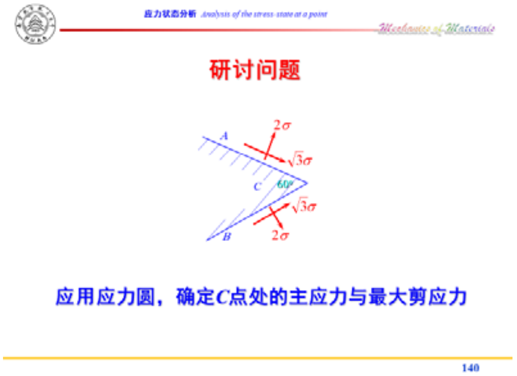


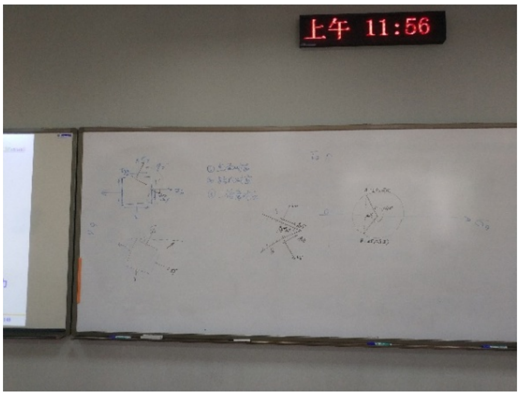


罗发程同学画出的平面应力状态的三个应力圆，为三向应力状态应力圆的讲授作了很好的铺垫。讲授完三向应力状态的应力圆后，李老师与学生对这一部分的几个例题进行了适当讨论，随后提出一个深度研讨问题，给同学们 5 分钟来进行讨论。这个深度研讨问题考察学生对应力圆画法的掌握程度，老师只讲授了两个相邻方向面互相垂直时应力圆的画法，而在这个深度问题中两个相邻方向面不垂直，如何通过画应力圆求得该点的主应力和最大剪应力呢？

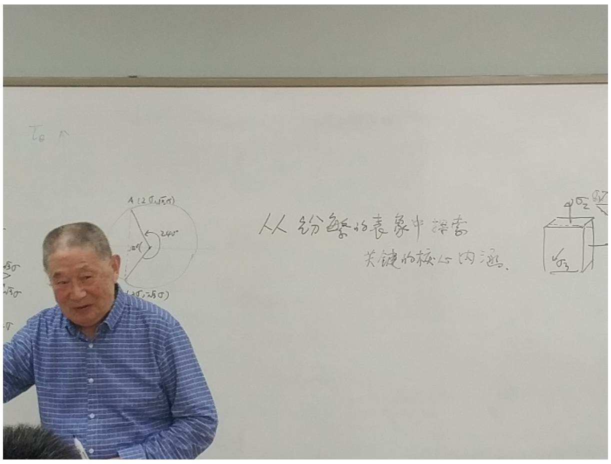
5 分钟后，发现班里同学约 60%的同学给出了正确结果，陈英杰同学到讲台

对该问题进行了详细的讲解。





最后，范老师对本堂课进行了总结：从纷繁的表象中揭示关键的核心内涵。



应力状态已经进行了两堂课，第一堂课讲了一点应力状态的的解析表达；第二堂课讲了一点应力状态的图形表达——应力圆及其应用。两堂课下来，概念、理论、方法 以及公式，可以说：很多很多！这个时候需要引导学生梳理一下，在纷繁的教学内容中，寻找内在联系，揭示关键的核心内涵——坐标旋转（坐标变换）的概念。

为什么说这是关键的核心内涵，请同学们先自己研究，我们将在下一堂课的深度研讨中进行讨论。