

范钦珊 李 晨 李栋栋 孙 伟 (特邀)

# 材料力学

Mechanics of Materials





# 自主学习 + 深度研讨



# 单元7 一般应力状态下 的强度设计准则及其工程应用

(Unit 7 Design criteria for strength under general stress-state and it's applications in engineering)



# 开篇之说

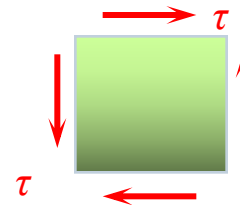
## 强度设计的新问题

在前面的几章里，已经建立了关于正应力和剪应力的强度条件：

$$\sigma \leq [\sigma]$$



$$\tau \leq [\tau]$$



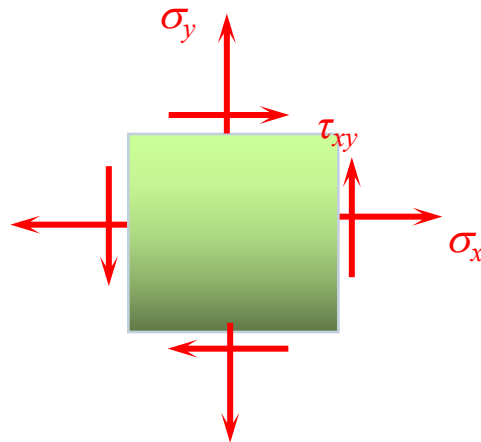
这实际上是关于单向应力状态和纯剪应力状态的设计准则。



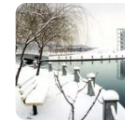
# 开篇之说

## 强度设计的新问题

现在的问题是：对于一般应力状态，也就是既有正应力又有剪应力作用的应力状态，设计准则应该是什么？



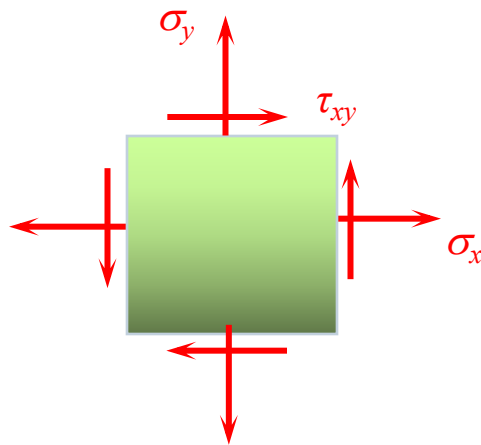
? ≤ ?



# 开篇之说

## 强度设计的新问题

现在的问题是：对于一般的应力状态，也就是既有正应力又有剪应力作用的应力状态，设计准则应该是什么？



$$\sigma_x \leq [\sigma]$$

$$\sigma_y \leq [\sigma]$$

$$\tau_{xy} \leq [\tau]$$

? X

为什么不正确？

这是因为没有考虑各个应力分量所产生的综合效应，这种综合效应导致失效。



## 自主学习从问题开始

应力分量对于失效的综合效应是什么？

应力分量对于失效的综合效应在建立一般应力状态下强度设计准则中起什么作用？

这是建立一般应力状态下强度设计准则的难点所在！



# 自主学习从问题开始

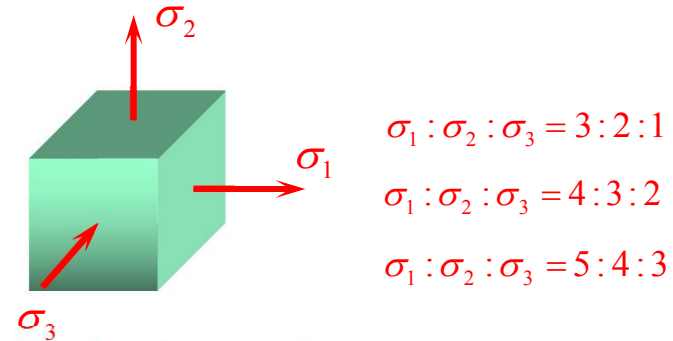
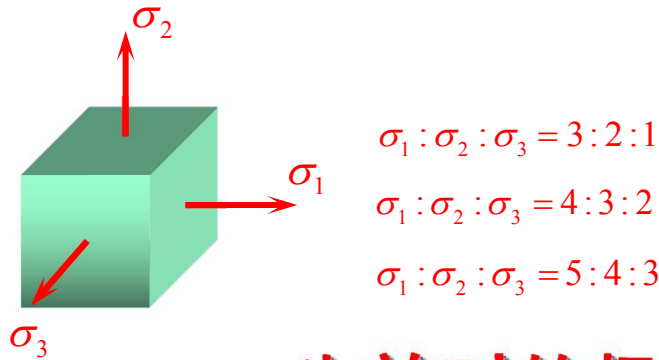
难点能不能破解？  
怎样破解这一难点？



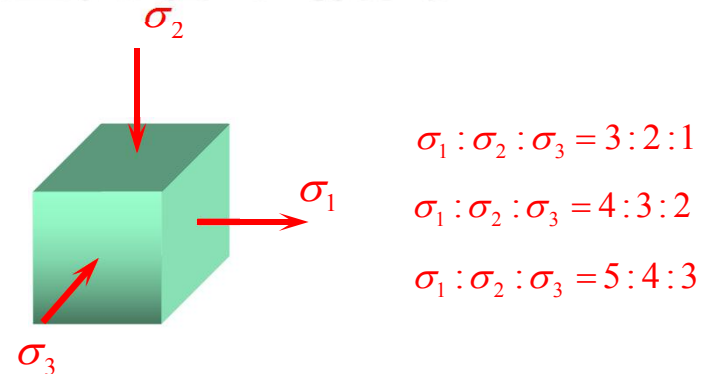
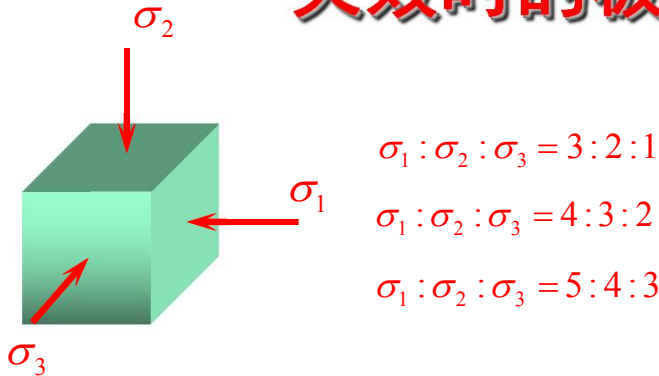


## 寻找综合效应的难点之一

大家知道，单向应力状态和纯剪应力状态下的极限应力值，是直接由实验确定的。但是，复杂应力状态下则不能。这是因为：一方面复杂应力状态各式各样，可以说有无穷多种，不可能一一通过实验确定极限应力：



**失效时的极限应力各不相同!!!**





## 寻找综合效应的难点之二

有些复杂应力状态的实验，技术上难以实现。



## 难点能不能破解？

建立复杂应力状态下的强度设计准则的办法，包括两部分内容——一是通过已有的实验结果以及大量工程结构强度失效案例的信息，归纳、总结出强度失效的共同规律；二是利用简单的拉伸实验结果。



- 破解建立强度设计准则难点的技术路径
- 关于脆性断裂的强度设计准则
- 关于屈服的强度设计准则
- 圆轴承受弯曲与扭转共同作用时的强度设计
- 圆柱形薄壁容器强度设计简述
- 深度研讨



# ■ 破解建立强度设计准则 的技术路径



大量实验结果以及工程结构失效案例的信息表明，材料在常温、静载作用下主要发生两种形式的强度失效：一种是屈服；另一种是断裂。



简单拉伸实验给出了屈服与断裂的极限应力： $\sigma_s$ ， $\sigma_b$ 。

**现在的问题是：怎样将二者联系起来，形成复杂应力状态下的强度设计准则？**



**大量实验结果以及工程结构失效案例的信息表明，材料在常温、静载作用下主要发生两种形式的强度失效：一种是屈服；另一种是断裂。**

**对于同一种失效形式，有可能在引起失效的原因中包含着共同的因素。建立复杂应力状态下的强度失效判据，就是提出关于材料在不同应力状态（当然包括单向拉伸应力状态）下失效共同原因的各种假说。**



**根据这些假说。就有可能利用单向拉伸的实验结果，建立材料在一般应力状态下的失效判据。就可以预测材料在复杂应力状态下，何时发生失效，以及怎样保证不发生失效，进而建立复杂应力状态下的设计准则。**



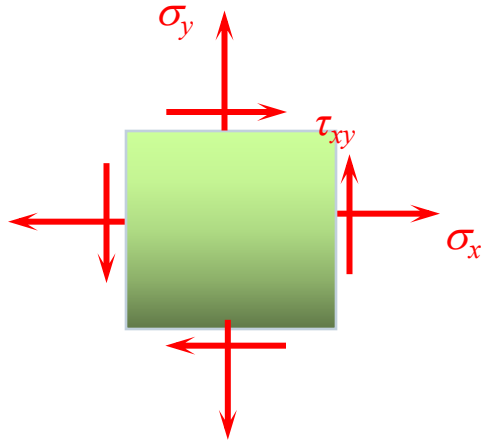


大量实验结果以及工程结构失效案例的信息表明，材料在常温、静载作用下主要发生两种形式的强度失效：一种是屈服；另一种是断裂。

## 关于引起同一种失效形式的原因假说——强度理论



简单拉伸实验给出了屈服与断裂的极限应力： $\sigma_s$ ， $\sigma_b$ 。



**? ≤ ?**

$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$

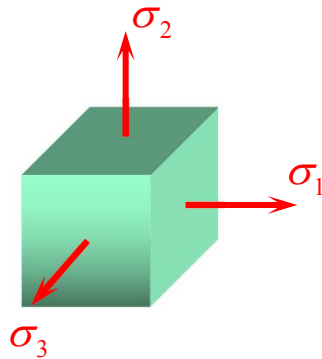
$\sigma_s$  or  $\sigma_b$



通过对断裂和屈服原因的假说，直接应用单向拉伸的实验结果，建立材料在各种应力状态下的断裂与屈服的强度设计准则。



因为任意应力状态都可以表示成主应力的形式，所以在以下的分析中，将用3个主应力作用的应力状态表示任意的应力应力状态：



其中，主应力

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

可以为拉应力，也可以为压应力；主应力的数值可大可小。



# 4个基本的强度设计准则



# ■ 关于脆性断裂的强度设计准则



零件或构件在载荷作用下，没有明显的破坏前兆（例如明显的塑性变形）而发生突然破坏的现象，称为**断裂失效**（failure by fracture or rupture）。



关于断裂的强度设计准则有**最大拉应力准则**与**最大拉应变准则**。最大拉应变准则只与少数材料的实验结果相吻合，工程上已经很少应用。





- 最大拉应力准则(第一强度理论)
- 最大拉应变准则(第二强度理论)



## 最大拉应力准则 (第一强度理论)

**最大拉应力准则** (maximum tensile stress criterion) ， 又称为**第一强度理论**， 它也是关于无裂纹脆性材料构件的断裂失效的准则。

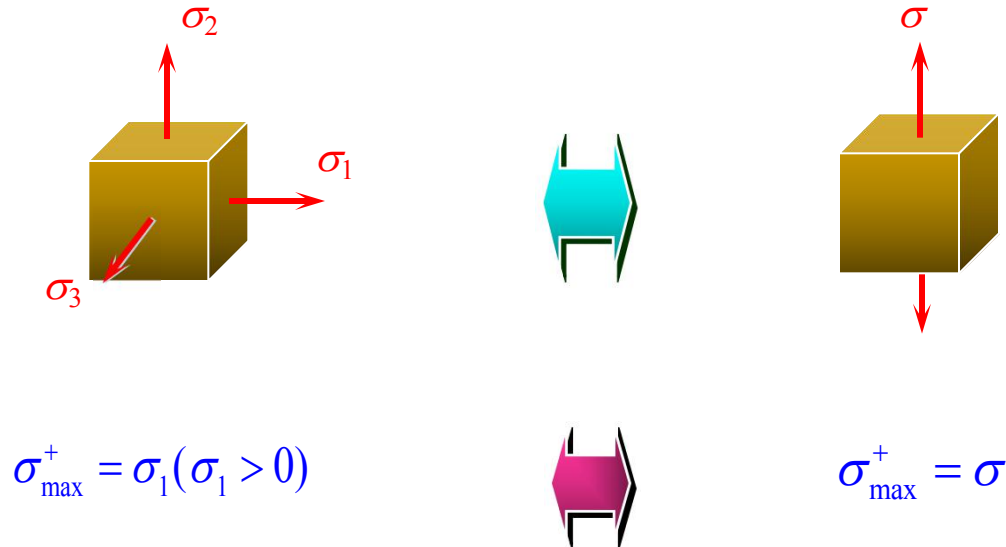


**根据最大拉应力准则**，无论材料处于什么应力状态，只要发生脆性断裂，其共同原因都是由于微元内的最大拉应力达到了某个共同的极限值。

$$\sigma_{\max}^+ = \sigma_{\max}^0 (\sigma_1 > 0)$$

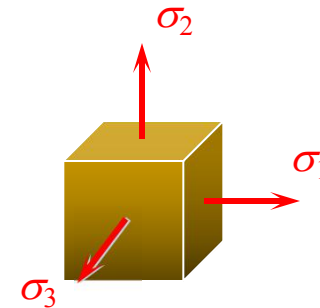
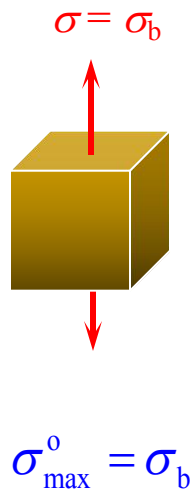


根据**最大拉应力准则**，无论材料处于什么应力状态，只要发生脆性断裂，其共同原因都是由于微元内的最大拉应力达到了某个共同的极限值。





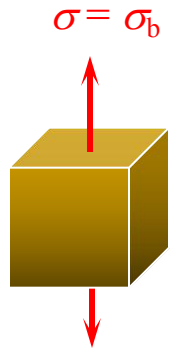
根据**最大拉应力准则**，无论材料处于什么应力状态，只要发生脆性断裂，其共同原因都是由于微元内的最大拉应力达到了某个共同的极限值。



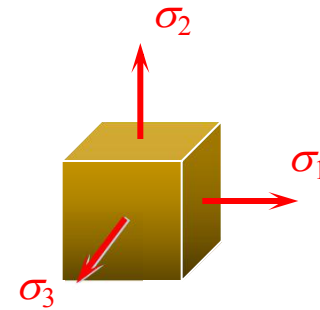
$$\sigma_{\max}^+ = \sigma_1^0 (\sigma_1 > 0) = ?$$



根据**最大拉应力准则**，无论材料处于什么应力状态，只要发生脆性断裂，其共同原因都是由于微元内的最大拉应力达到了某个共同的极限值。



$$\sigma_{\max}^0 = \sigma_b$$



$$\sigma_{\max}^+ = \sigma_1 (\sigma_1 > 0) = \sigma_{\max}^0 = \sigma_b$$



**失效判据**

$$\sigma_1 = \sigma_b$$

**设计准则**

$$\sigma_1 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$$



## 最大拉应变准则 (第二强度理论)

**最大拉应变准则** (maximum tensile strain criterion)，又称为**第二强度理论**，它也是关于无裂纹脆性材料构件的断裂失效的准则。



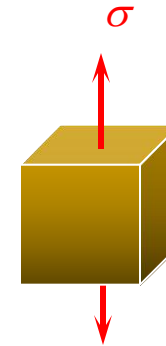
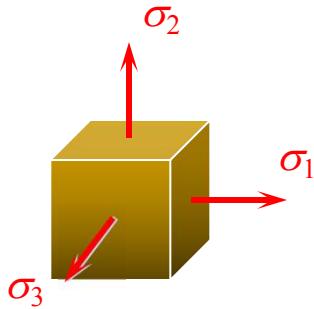
**根据最大拉应变准则，无论材料处于什么应力状态，只要发生脆性断裂，其共同原因都是由于微元的最大拉应变达到了某个共同的极限值。**

$$\varepsilon_{\max}^+ = \varepsilon_{\max}^0 (\varepsilon_1 > 0)$$





根据**最大拉应变准则**，无论材料处于什么应力状态，只要发生脆性断裂，其共同原因都是由于微元的最大拉应变达到了某个共同的极限值。



$$\varepsilon_{\max}^+ = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$



$$\varepsilon_{\max}^+ = \frac{\sigma_{\max}^+}{E} = \frac{\sigma}{E}$$



根据**最大拉应变准则**，无论材料处于什么应力状态，只要发生脆性断裂，其共同原因都是由于微元的最大拉应变达到了某个共同的极限值。

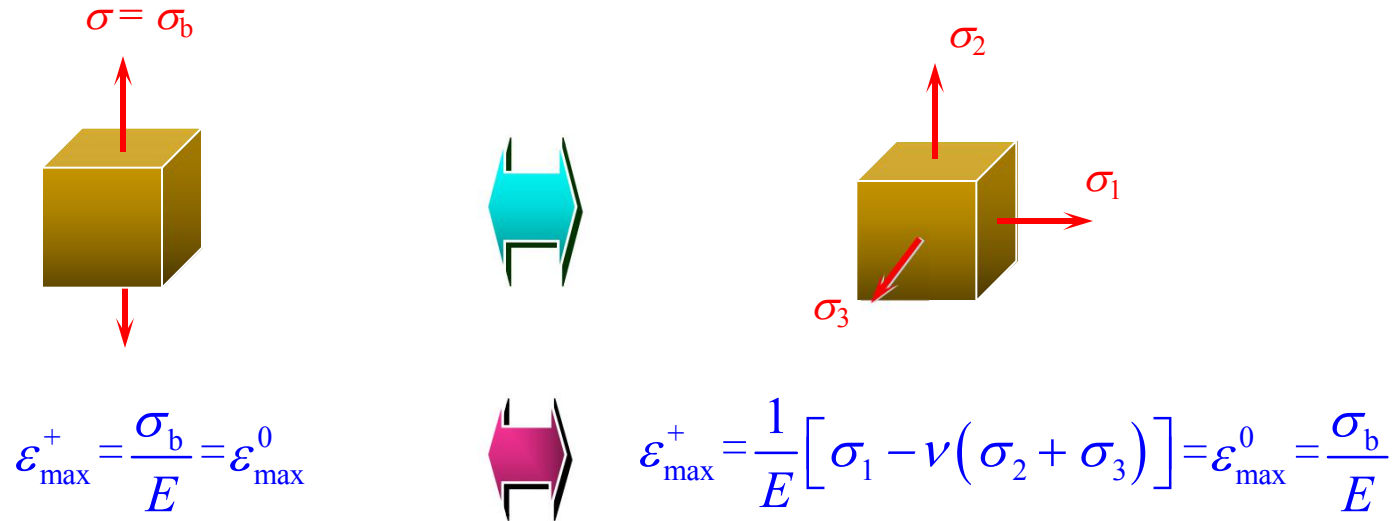
$$\varepsilon_{\max}^+ = \frac{\sigma_b}{E} = \varepsilon_{\max}^0$$



$$\varepsilon_{\max}^+ = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = ?$$



**根据最大拉应变准则**，无论材料处于什么应力状态，只要发生脆性断裂，其共同原因都是由于微元的最大拉应变达到了某个共同的极限值。



**失效判据**

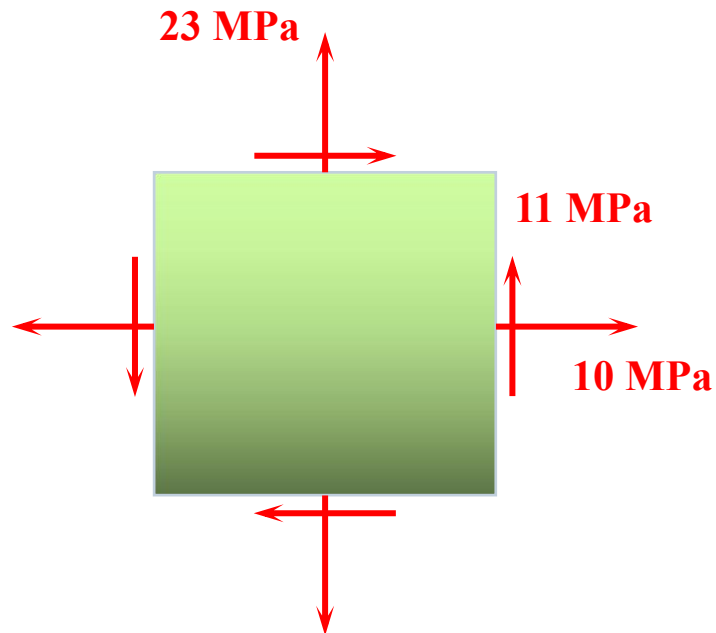
$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_b$$

**设计准则**

$$\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] = \frac{\sigma_b}{n_b}$$

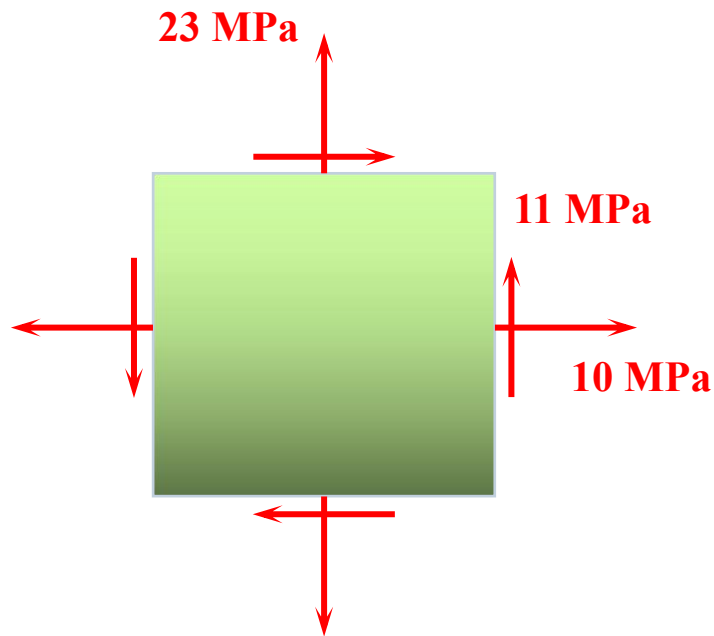


## 能力训练 1



**已知：** 灰铸铁构件上危险点的应力状态。铸铁拉伸许用应力 $[\sigma]^+ = 30\text{MPa}$ 。

**试校核：** 该点的强度。

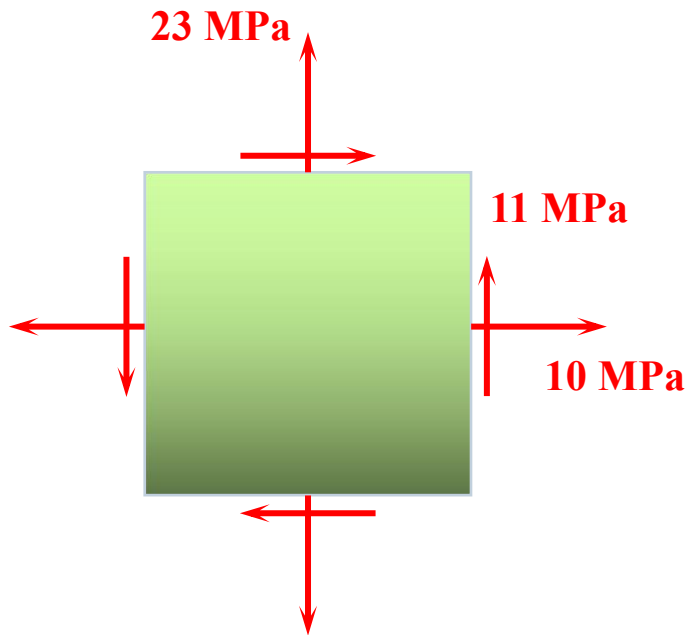


**解：**首先根据材料和应力  
状态确定失效形式，选择设计  
准则。

脆性断裂，由最大拉应力  
准则得到

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 \leq [\sigma]^+$$

其次是确定主应力

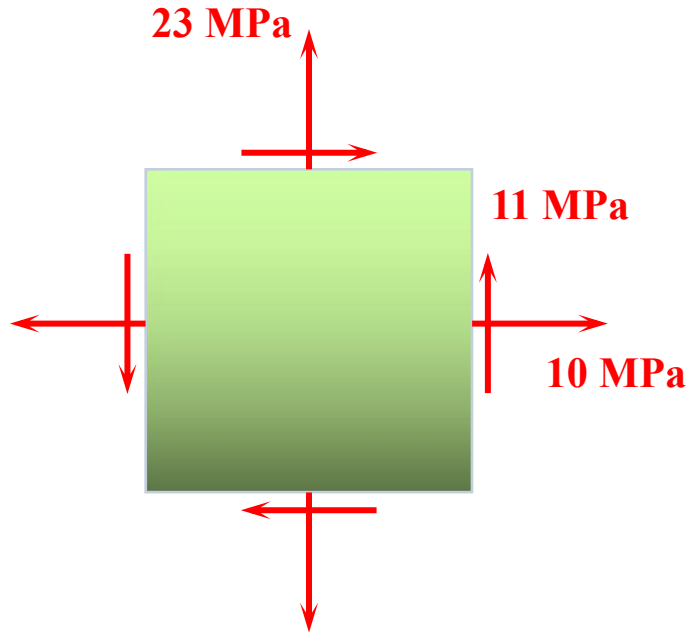


其次是确定主应力

$$\sigma' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma'' = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$\sigma''' = 0$$



$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 29.28 \text{ MPa}, \\ \sigma_2 &= 3.72 \text{ MPa}, \\ \sigma_3 &= 0\end{aligned}$$

**解：**最后应用最大拉应力设计准则校核强度

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = 29.28 \text{ MPa} < [\sigma] = 30 \text{ MPa}$$

**结论：**危险点的强度是安全的。



## ■ 关于屈服的强度设计准则





关于屈服的强度设计准则主要有**最大剪应力准则**和**畸变能密度准则**。



- **最大剪应力准则(第三强度理论)**
- **畸变能密度准则(第四强度理论)**



## 最大剪应力准则 (第三强度理论)

**最大剪应力准则** (maximum shearing stress criterion) **又称为第三强度理论。**



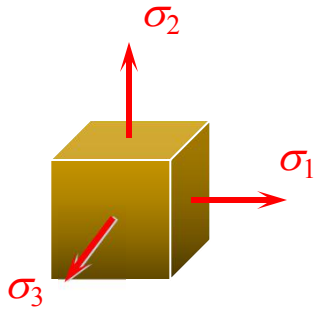
**根据最大剪应力准则，无论材料处于什么应力状态,只要发生屈服,都是由于微元内的最大剪应力达到了某一共同的极限值。**

**根据这一准则，由拉伸实验得到屈服应力，即可确定各种应力状态下发生屈服时最大剪应力的极限值。**

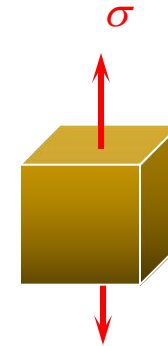
$$\tau_{\max} = \tau_{\max}^0$$



根据**最大剪应力准则**，无论材料处于什么应力状态,只要发生屈服,都是由于微元内的最大剪应力达到了某一共同的极限值。



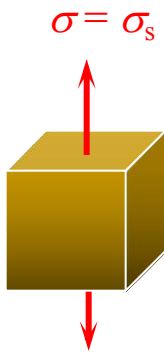
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$



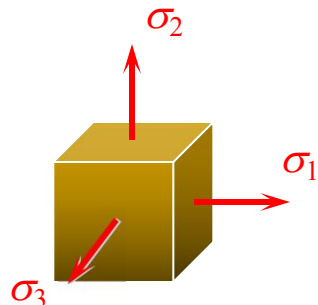
$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma}{2}$$



根据**最大剪应力准则**，无论材料处于什么应力状态,只要发生屈服,都是由于微元内的最大剪应力达到了某一共同的极限值。

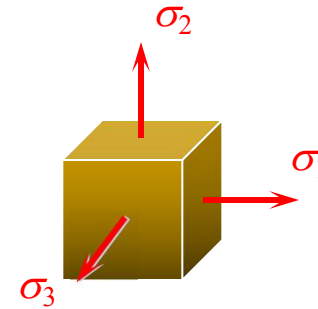
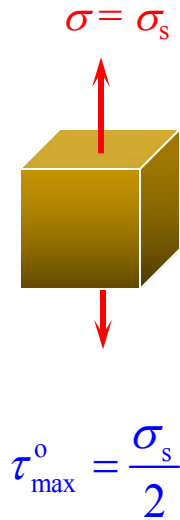

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_s}{2} = \tau_{\max}^0$$




$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_{\max}^0 = ?$$



**根据最大剪应力准则，无论材料处于什么应力状态，只要发生屈服，都是由于微元内的最大剪应力达到了某一共同的极限值。**



$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \tau_{\max}^0 = \frac{\sigma_s}{2}$$

**失效判据**

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_s$$

**设计准则**

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s}$$



## 畸变能密度准则 (第四强度理论)

**畸变能密度准则** (criterion of strain energy density corresponding to distortion) **又称为第四强度理论。**





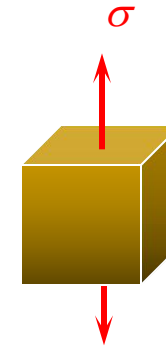
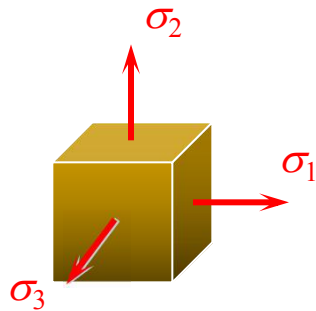
**根据畸变能密度准则**，无论材料处于什么应力状态，只要发生屈服（或剪断），其共同原因都是由于微元内的畸变能密度达到了某个共同的极限值。

根据这一准则，由拉伸屈服试验结果，即可确定各种应力状态下发生屈服时畸变能密度的极限值。

$$\nu_d = \nu_d^0$$



**根据畸变能密度准则，**无论材料处于什么应力状态，只要发生屈服（或剪断），其共同原因都是由于微元内的畸变能密度达到了某个共同的极限值。



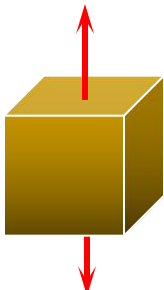
$$v_d = \frac{1+\nu}{6E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]$$

$$v_d = \frac{1+\nu}{3E} \sigma^2$$



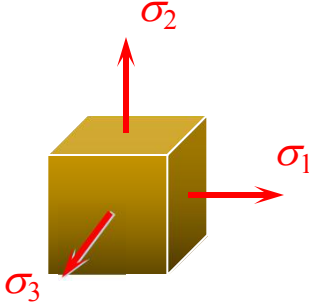
**根据畸变能密度准则，无论材料处于什么应力状态，只要发生屈服（或剪断），其共同原因都是由于微元内的畸变能密度达到了某个共同的极限值。**

$\sigma = \sigma_s$



$$v_d = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_s^2 = v_d^0$$





$$v_d = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$
$$= v_d^0 = ?$$



**根据畸变能密度准则，无论材料处于什么应力状态，只要发生屈服（或剪断），其共同原因都是由于微元内的畸变能密度达到了某个共同的极限值。**

$\sigma = \sigma_s$

$$v_d = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_s^2 = v_d^0$$



$$v_d = \frac{1+\nu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

$$= v_d^0 = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_s^2$$

**失效判据**

$$\sqrt{v_d} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_s$$

**设计准则**

$$\sqrt{v_d} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_s}{n_s}$$

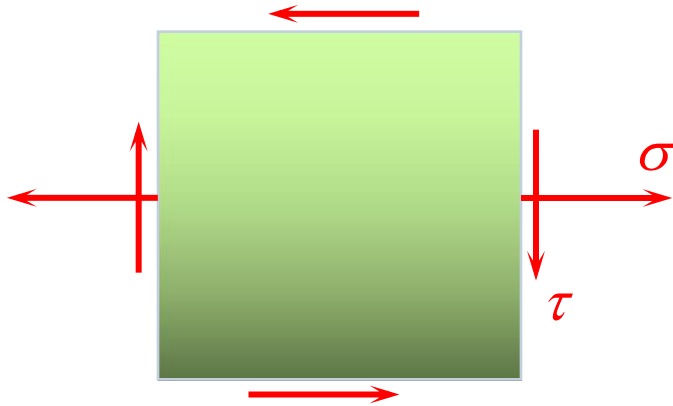


**畸变能密度准则是由米泽斯（R.von Mises）于1913年从修正最大剪应力准则出发提出的。1924年，德国的亨奇（H.Hencky）从畸变能密度出发对这一准则作了解释，从而形成了畸变能密度准则，因此，这一理论又称为米泽斯准则。**

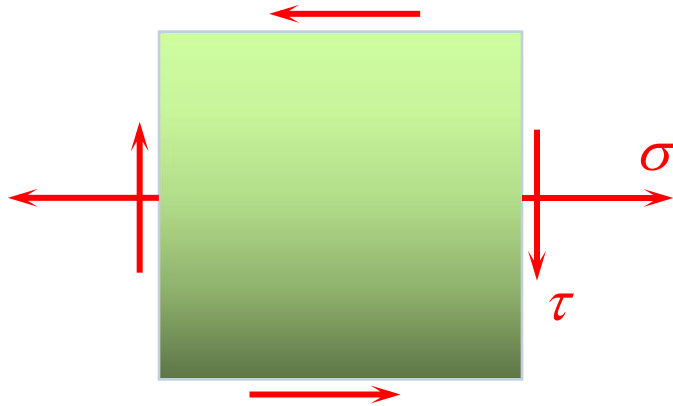
**1926年，德国的洛德（Lode, W.）通过薄壁圆管同时承受轴向拉伸与内压力时的屈服实验，验证畸变能密度准则。他发现：对于碳素钢和合金钢等韧性材料，这一准则与实验结果吻合得相当好。其他大量的试验结果还表明；这一准则能够很好地描述铜、镍、铝等大量工程韧性材料的屈服状态。**



## 能力训练 2



已知： $\sigma$ 和 $\tau$ 。  
试写出：最大剪应力准则和  
畸变能密度准则的表达式。

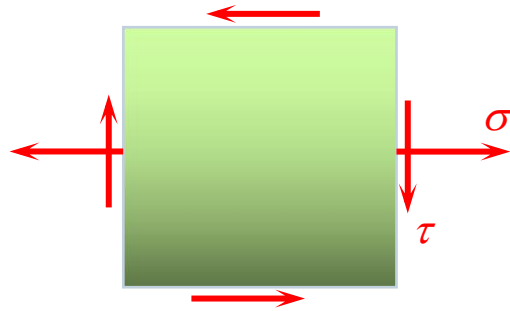


**解：确定主应力**

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$



$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

**解：建立设计准则表达式**

**根据剪应力准则得到**

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

**根据畸变能密度准则得到**

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]$$





# ■ 工程应用之一

## 一般情形下弯曲构件的强度设计



所谓一般情形是指承受弯曲的构件中，除了最大正应力作用面和最大剪应力作用面，还有一种危险截面，这就是**弯矩和剪力都比较大的截面**。

此外在最大正应力和最大剪应力作用面上，除了最大正应力和最大剪应力作用点外，还可能存在**另一类危险点**——同时有比较大的正应力和比较大的剪应力。



## 一般情形下承弯构件的强度设计需要 遵循以下计算过程：

★ 首先，要正确地画出剪力图和弯矩图，确定可能的危险面以及危险面上剪力和弯矩数值。

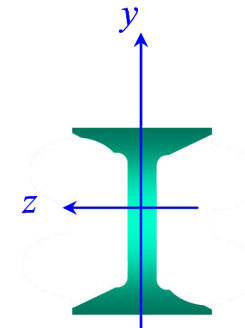
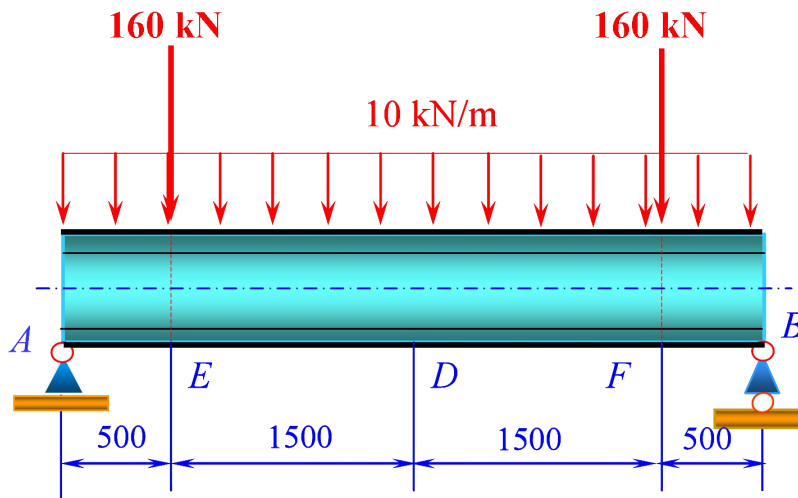
★ 根据危险面上弯矩和剪力的实际方向，确定应力分布，综合考虑材料的力学性能，确定可能的危险点。

★ 根据危险点的应力状态，区分脆性材料与韧性材料，选择合适的设计准则，解决不同类型的强度问题。



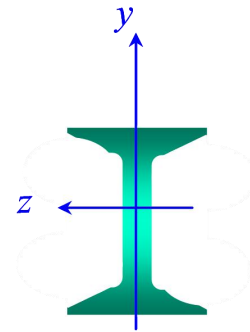
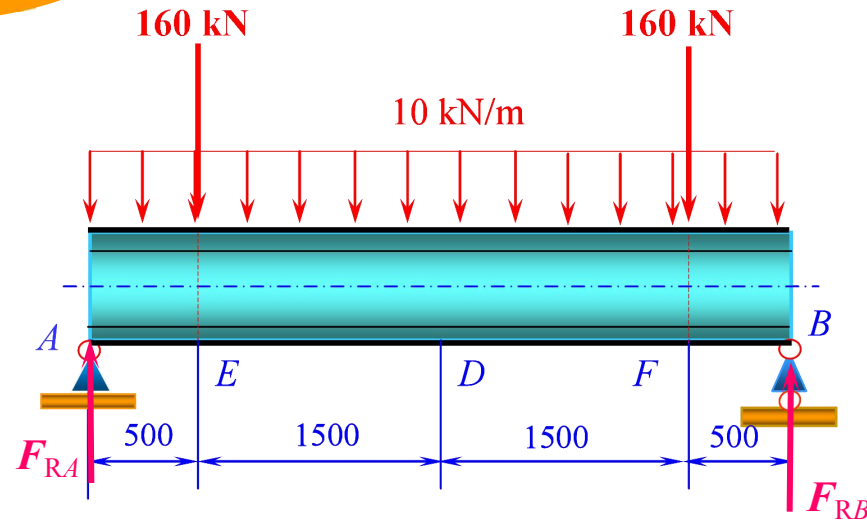
## 能力训练 3

简支梁受力如图所示。采用普通热轧工字型钢，且已知  $[\sigma] = 160\text{MPa}$ 。试确定工字型钢型号，并按最大剪应力准则对梁的强度作全面校核。

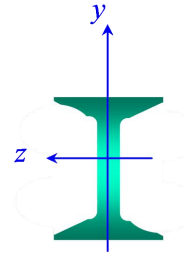
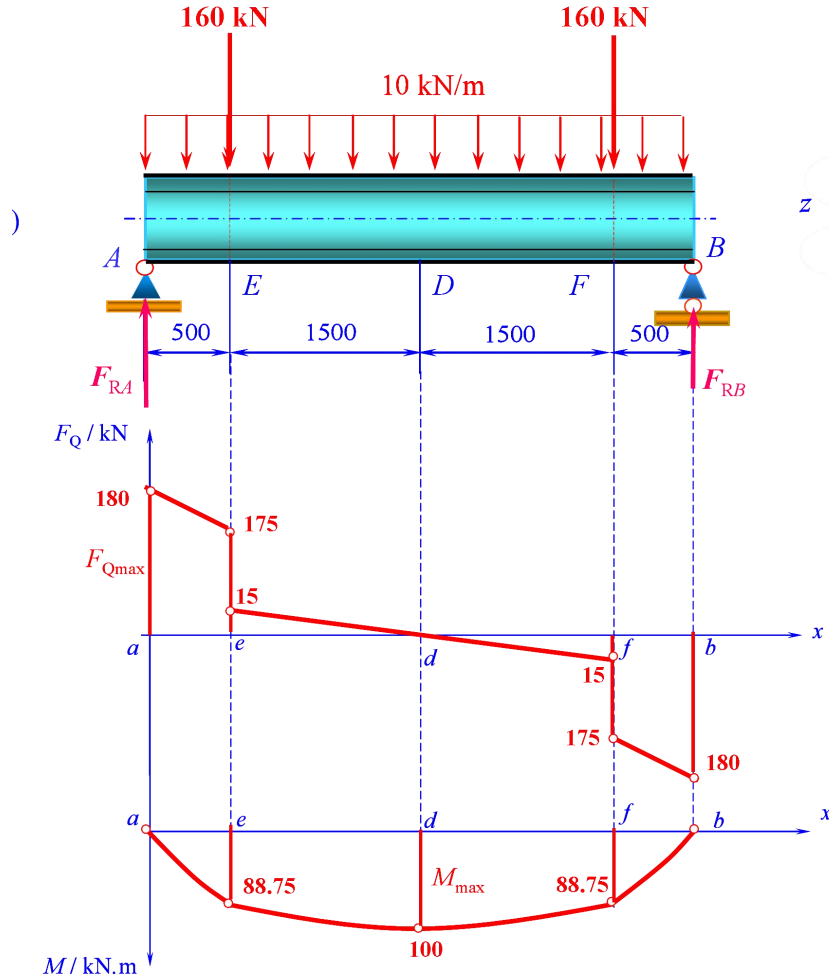




## 确定约束力



$$F_{RA} = F_{RB} = 180 \text{ kN} (\uparrow)$$



**确定可能的危险面**

**最大弯矩作用面**

$$M_D = M_{\max} = \left( 180 \times 2 - 160 \times 1.5 - \frac{1}{2} \times 10 \times 2^2 \right) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$= 100 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

**最大剪力作用面**

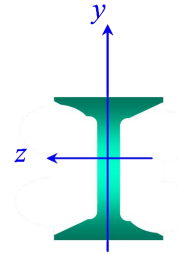
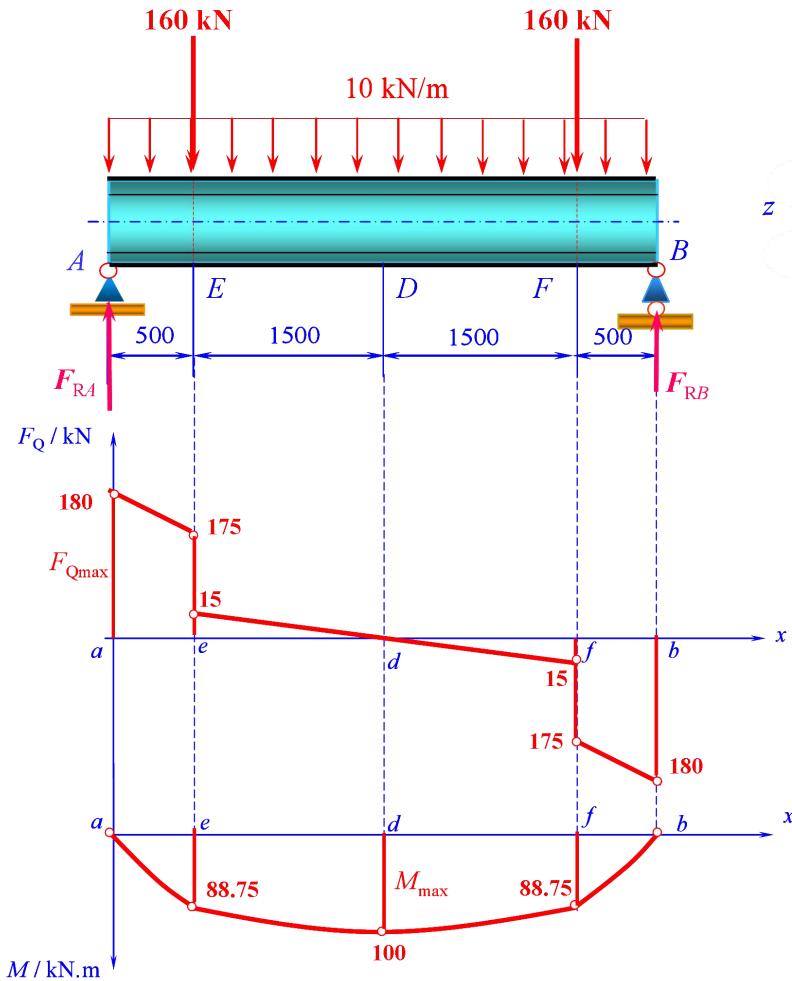
$$F_{QA} = F_{QB} = 180 \text{ kN}$$

**弯矩和剪力都比较大的作用面**

$$F_{QE} = F_{QF} = (180 - 0.5 \times 10) \text{ kN} = 175 \text{ kN}$$

$$M_E = M_F = \left( 180 \times 0.5 - \frac{1}{2} \times 10 \times 0.5^2 \right) \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$= 88.75 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



校核最大弯矩作用面

按最大正应力强度条件进行设计

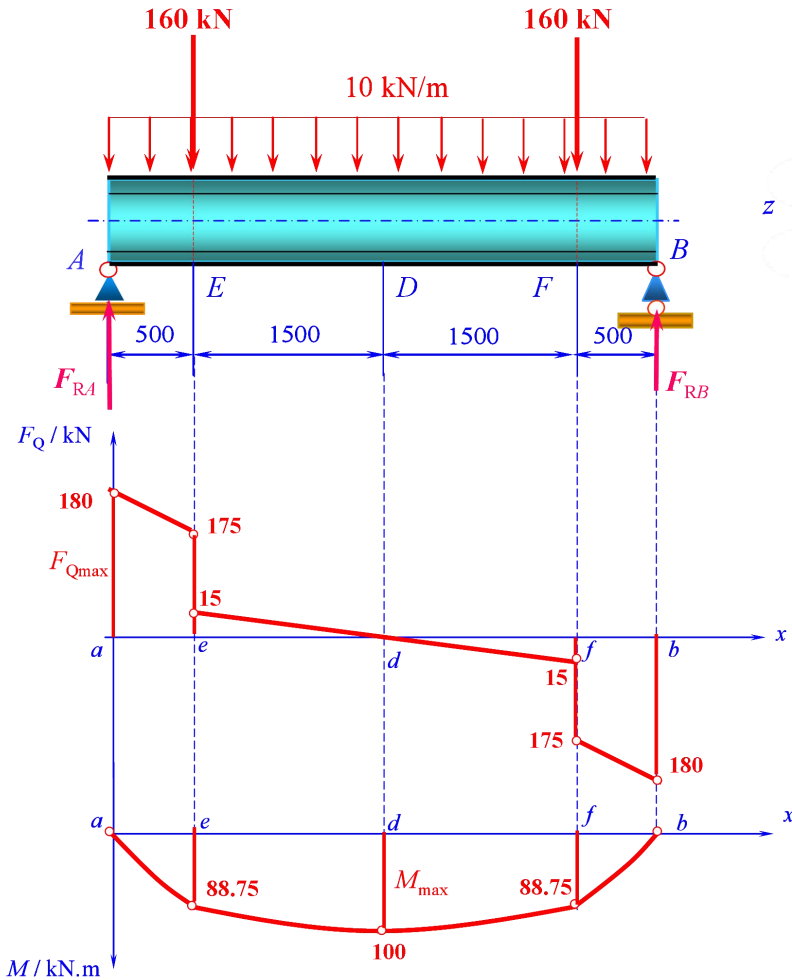
$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma]$$

$$W \geq \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{100 \times 10^3}{160 \times 10^6} \text{ m}^3 = 6.25 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

查型钢表，选工字钢No.32a:

$$W = 692.2 \text{ cm}^2, I_z = 11075.5 \text{ cm}^4$$

$$\frac{I_z}{S_z} = 27.46 \text{ cm}$$



### 校核最大剪力作用面

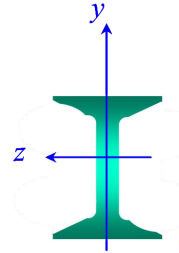
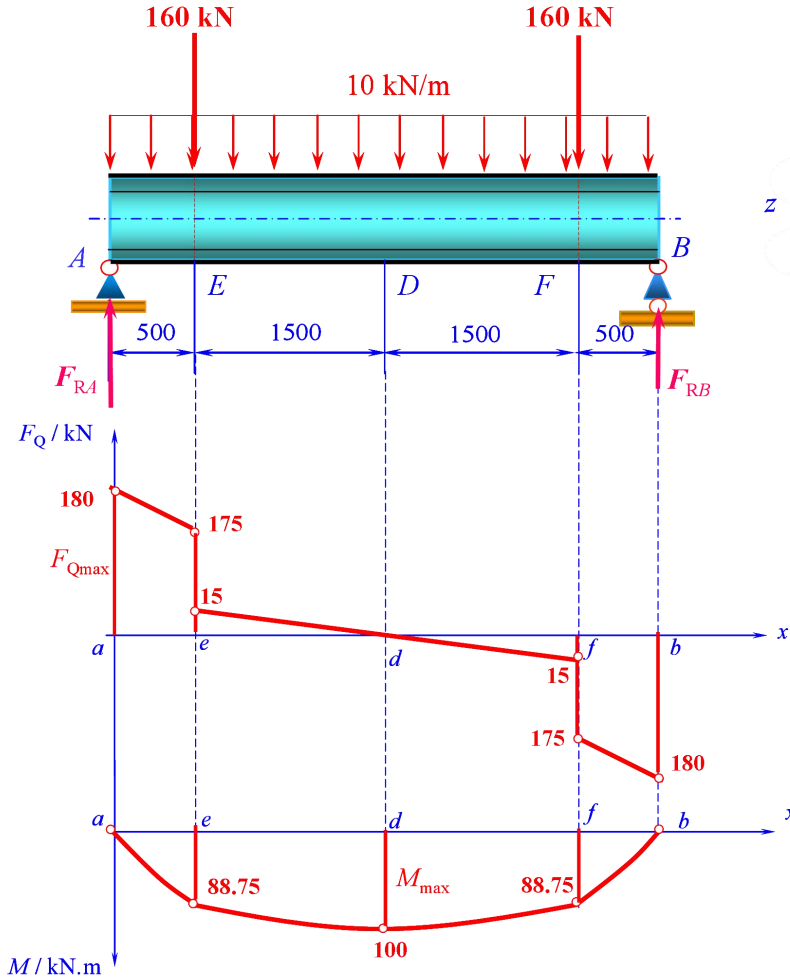
### 校核最大剪力作用面上的 最大剪应力

$$\begin{aligned}\tau_{\max} &= \frac{F_Q S_z}{\delta I_z} = \frac{180 \times 10^3}{9.5 \times 10^{-3} \times 27.26 \times 10^{-2}} \text{ Pa} \\ &= 69 \times 10^6 \text{ Pa} \\ &= 69 \text{ MPa}\end{aligned}$$

$$\sigma_1 = \tau_{\max}, \quad \sigma_1 = 0, \quad \sigma_3 = -\tau_{\max}$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{4\tau_{\max}^2} = 2\tau_{\max} = 138 \text{ MPa} < [\sigma]$$





校核弯矩和剪力都比较大的作用面

校核正应力与剪应力都比较大的点

$$\sigma_x = \frac{88.75 \times 10^3 \times 145 \times 10^{-3}}{1.10755 \times 10^{-8}} \text{ Pa}$$

$$= 116.2 \times 10^6 \text{ Pa} = 116.2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \frac{F_{QC} \cdot S_z^*}{\delta I_z}$$

$$= \frac{175 \times 10^3 \times 130 \times 15 \times 152.5 \times 10^{-9}}{9.5 \times 10^{-3} \times 1.10755 \times 10^{-8}} \text{ Pa}$$

$$= 49.46 \times 10^6 \text{ Pa} = 49.46 \text{ MPa}$$

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} = 152.6 \text{ MPa} < [\sigma]$$



## 结论：

根据以上的分析和计算结果，对于所给的简支梁，选择No.32a工字钢，强度是安全的。



## ■ 工程应用之二

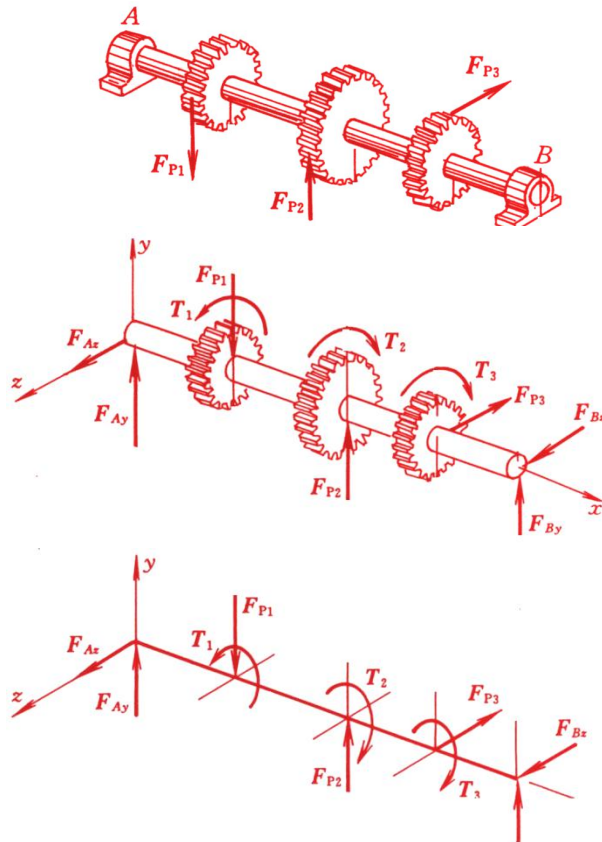
# 圆轴承受弯曲与扭转共同作用时的强度设计



- 力学模型
- 危险点及其应力状态
- 强度条件与设计公式



## 力学模型



借助于带轮或齿轮传递功率的传动轴，工作时在齿轮的齿上均有外力作用。

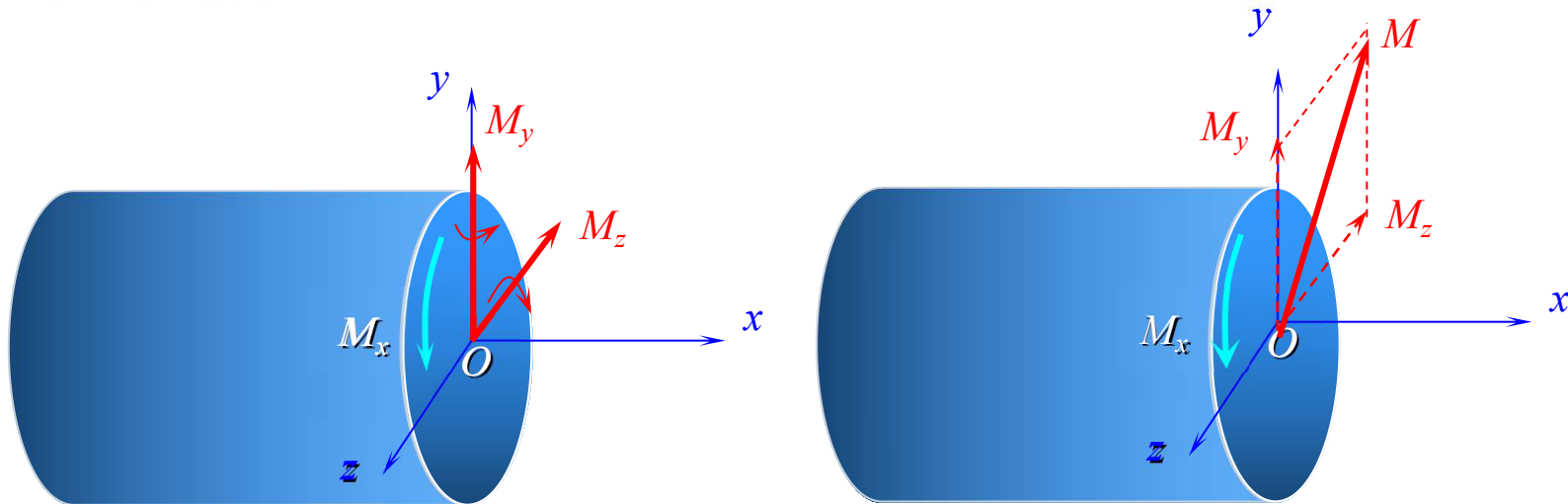
将作用在齿轮上的力向轴的截面形心简化便得到与之等效的力和力偶，这表明轴将承受横向载荷和扭转载荷。

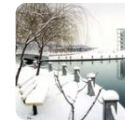
为简单起见，可以用轴线受力图代替原来的受力图。这种图称为传动轴的计算模型。



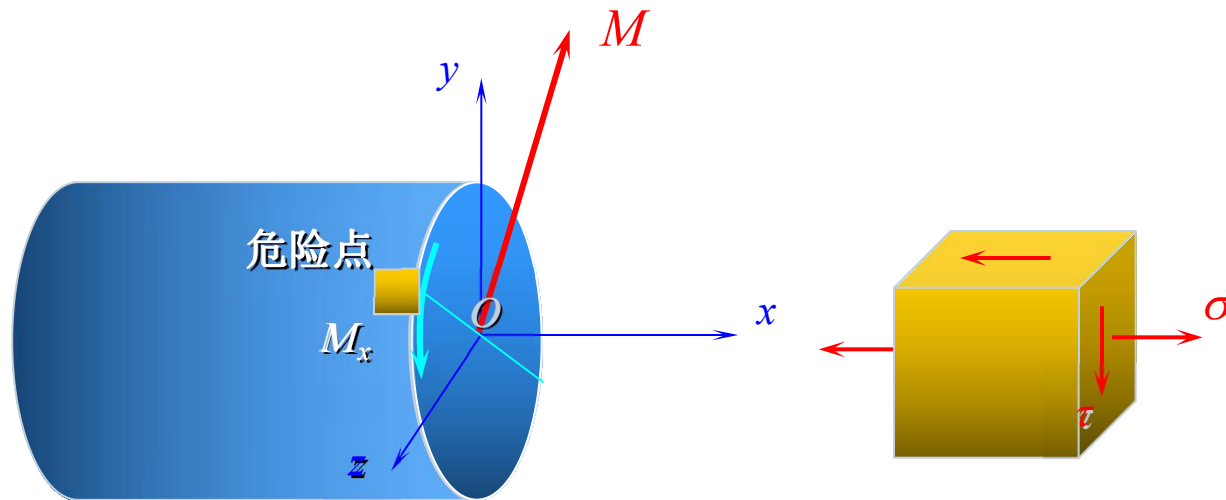
## 危险点及其应力状态

为了对承受弯曲与扭转共同作用的圆轴进行强度设计，一般需画出弯矩图和扭矩图（剪力一般忽略不计），并据此确定传动轴上可能的危险面。因为是圆截面，所以当危险面上有两个弯矩 $M_y$ 和 $M_z$ 同时作用时，应按矢量求和的方法，确定危险面上总弯矩 $M$ 的大小与方向。





根据截面上的总弯矩 $M$ 和扭矩 $M_x$ 的实际方向，以及它们分别产生的正应力和剪应力分布，即可确定承受弯曲与扭转作用的圆轴的危险点及其应力状态。

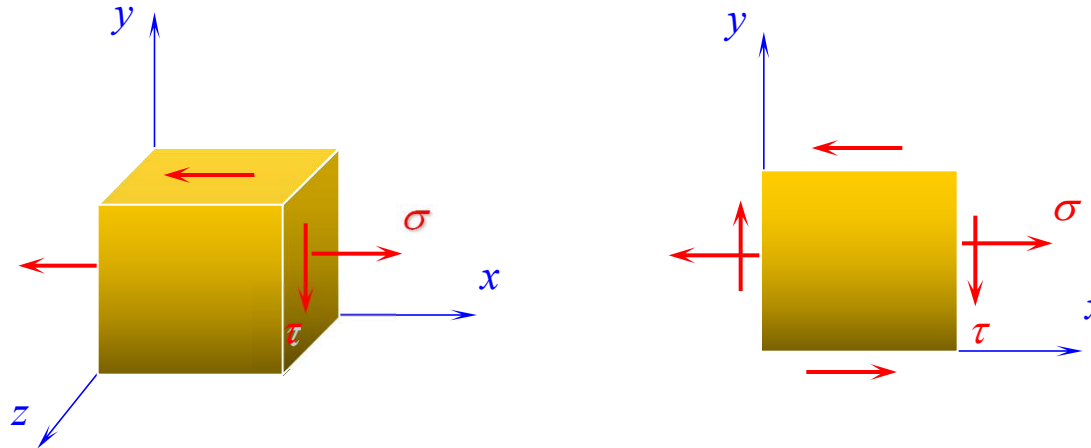


微元截面上的正应力和剪应力分别为

$$\sigma = \frac{M}{W}, \quad \tau = \frac{M_x}{W_p} \quad W = \frac{\pi d^3}{32}, \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16}$$



## 强度条件与设计公式



### 危险点应力状态的主应力

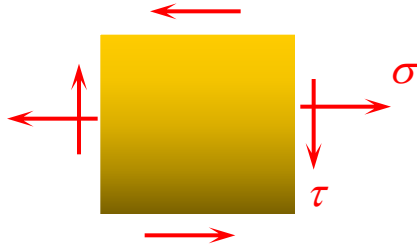
$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

因为承受弯曲与扭转作用的圆轴一般由韧性材料制成，故可用最大剪应力准则或畸变能密度准则作为强度设计的依据。于是，得到强度条件：





## 对于最大剪应力准则

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]$$

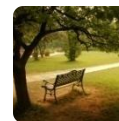
## 对于畸变能密度准则

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \\ & = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma] \end{aligned}$$

将 $\sigma$ 和 $\tau$ 的表达式代入上式，并考虑到 $W_p = 2W$ ，便得到

$$\frac{\sqrt{M^2 + M_x^2}}{W} \leq [\sigma] \quad \frac{\sqrt{M^2 + 0.75M_x^2}}{W} \leq [\sigma]$$

$$\frac{32\sqrt{M^2 + M_x^2}}{\pi d^3} \leq [\sigma] \quad \frac{32\sqrt{M^2 + 0.75M_x^2}}{\pi d^3} \leq [\sigma]$$

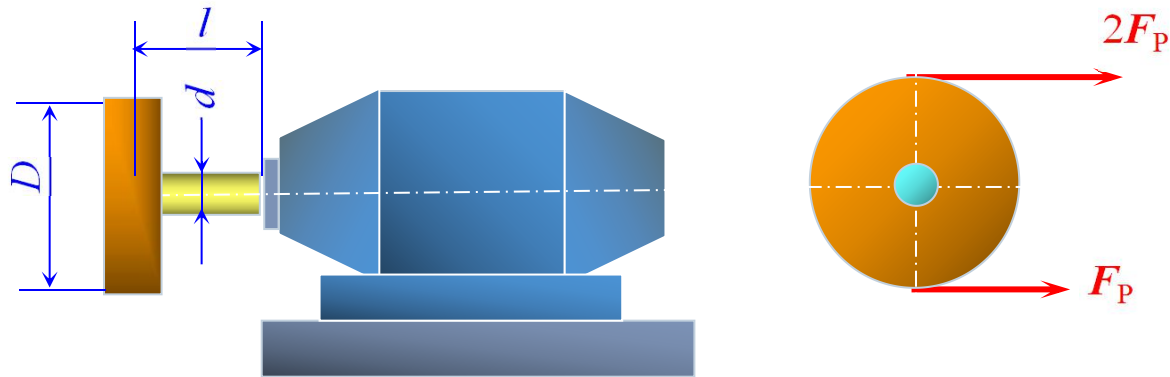


## 能力训练 4



电动机的功率 $P=9\text{ kW}$ ，转速 $n=715\text{ r/min}$ ，带轮的直径 $D=250\text{ mm}$ ，皮带松边拉力为 $F_p$ ，紧边拉力为 $2F_p$ 。电动机轴外伸部分长度 $l=120\text{ mm}$ ，轴的直径 $d=40\text{ mm}$ 。若已知许用应力 $[\sigma]=60\text{ MPa}$ ，

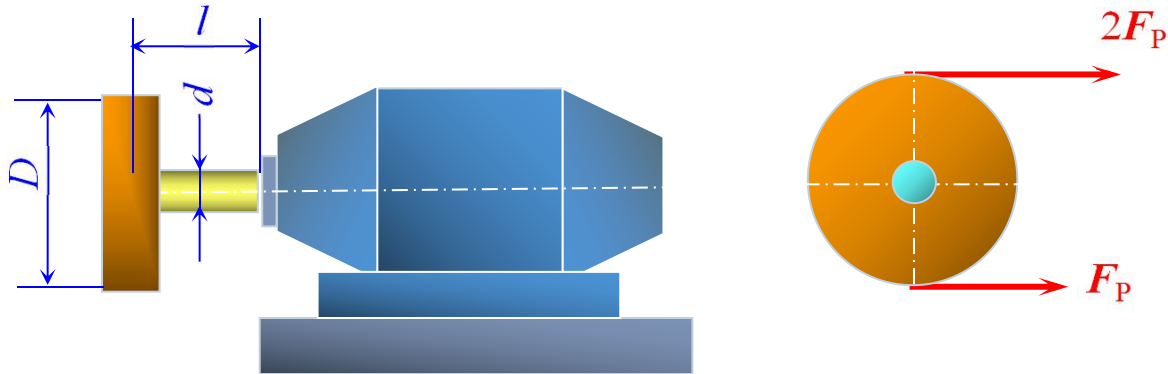
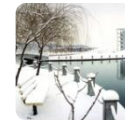
**试求：**用最大剪应力准则校核电动机轴的强度。



### 解：1. 计算外加力偶的力偶矩以及皮带拉力

电动机通过带轮输出功率，因而承受由皮带拉力引起的扭转和弯曲作用。根据轴传递的功率、轴的转速与外加力偶矩之间的关系，作用在带轮上的外加力偶矩为

$$M_e = 9549 \times \frac{P}{n} = 9549 \times \frac{9\text{kW}}{715\text{r/min}} = 120.2\text{N} \cdot \text{m}$$



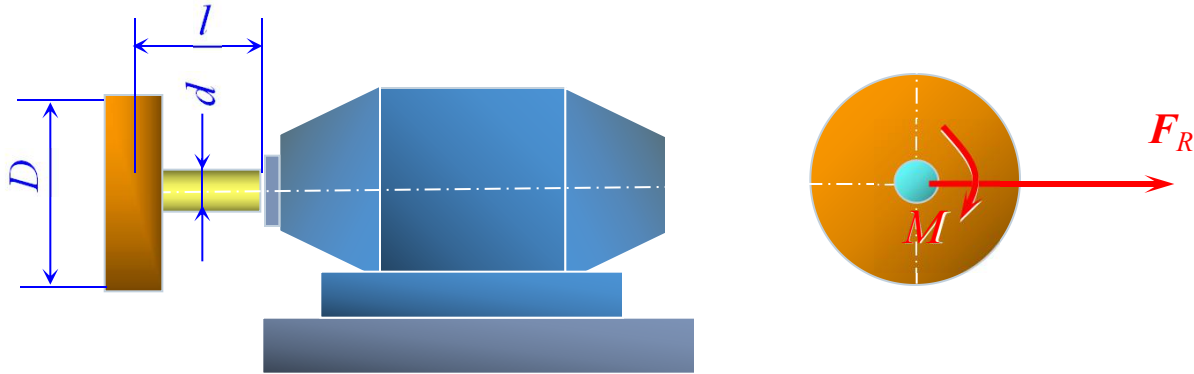
$$M_e = 9549 \times \frac{P}{n} = 9549 \times \frac{9\text{kW}}{715\text{r/min}} = 120.2\text{N} \cdot \text{m}$$

根据作用在皮带上的拉力与外加力偶矩之间的关系，有

$$2F_P \times \frac{D}{2} - F_P \times \frac{D}{2} = M_e$$

于是，作用在皮带上的拉力

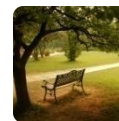
$$F_P = \frac{2M_e}{D} = \frac{2 \times 120.2\text{N} \cdot \text{m}}{250\text{mm} \times 10^{-3}} = 961.6\text{N}$$



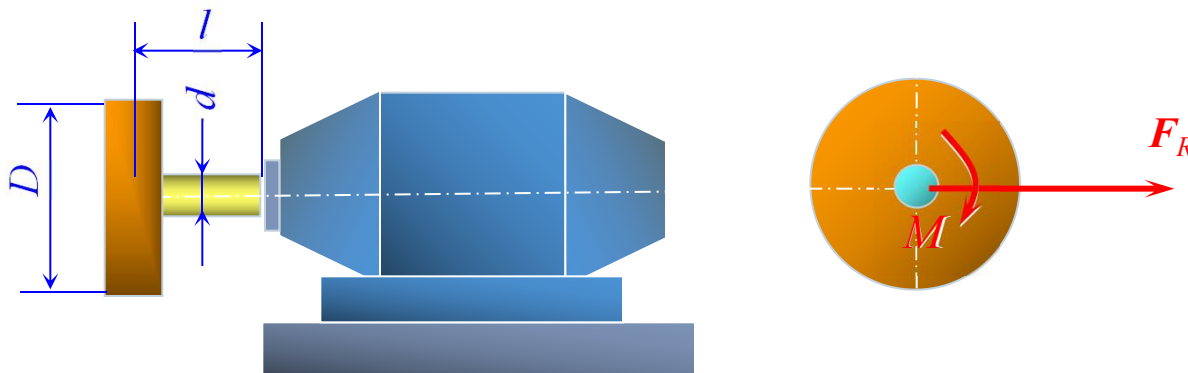
## 解：2. 确定危险面上的弯矩和扭矩

将作用在带轮上的皮带拉力向轴线简化，得到一个力和一个力偶，即

$$F_R = 3F_P = 3 \times 961.6\text{N} = 2884.8\text{N} , M_e = 120.2\text{N} \cdot \text{m}$$



## 解：2. 确定危险面上的弯矩和扭矩



轴的左端可以看作自由端，右端可视为固定端约束。由于问题比较简单，可以不必画出弯矩图和扭矩图，就可以直接判断出固定端处的横截面为危险面，其上之弯矩和扭矩分别为

$$M_{\max} = F_R \times l = 3F_p \times l = 3 \times 961.6 \text{ N} \times 120 \text{ mm} \times 10^{-3} = 346.2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_x = M_e = 120.2 \text{ N} \cdot \text{m}$$



$$M_{\max} = F_R \times l = 3F_p \times l = 346.2\text{N} \cdot \text{m}$$

$$M_x = M_e = 120.2\text{N} \cdot \text{m}$$

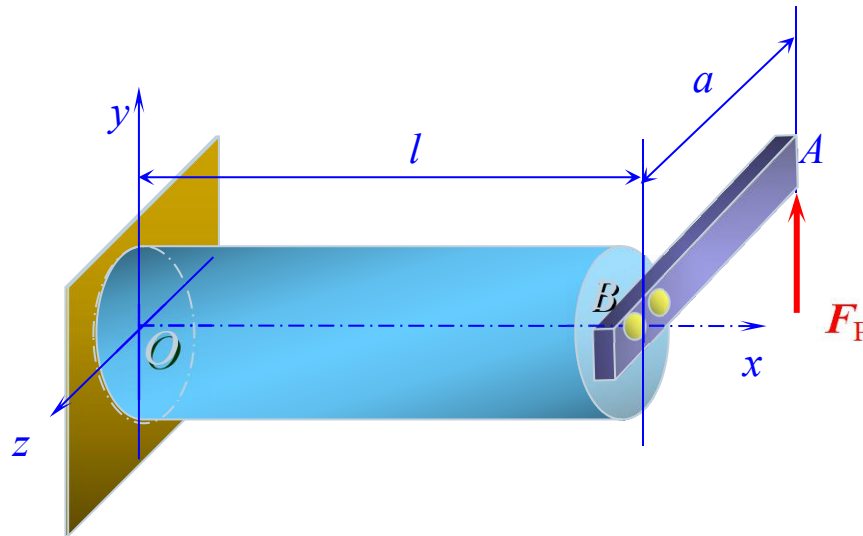
### 解：3. 应用最大剪应力准则

$$\frac{\sqrt{M^2 + M_x^2}}{W} = \frac{32\sqrt{(346.2\text{N} \cdot \text{m})^2 + (120.2\text{N} \cdot \text{m})^2}}{\pi(40\text{mm} \times 10^{-3})^3} = 58.32\text{MPa} \leq [\sigma]$$

所以，电动机轴的强度是安全的。



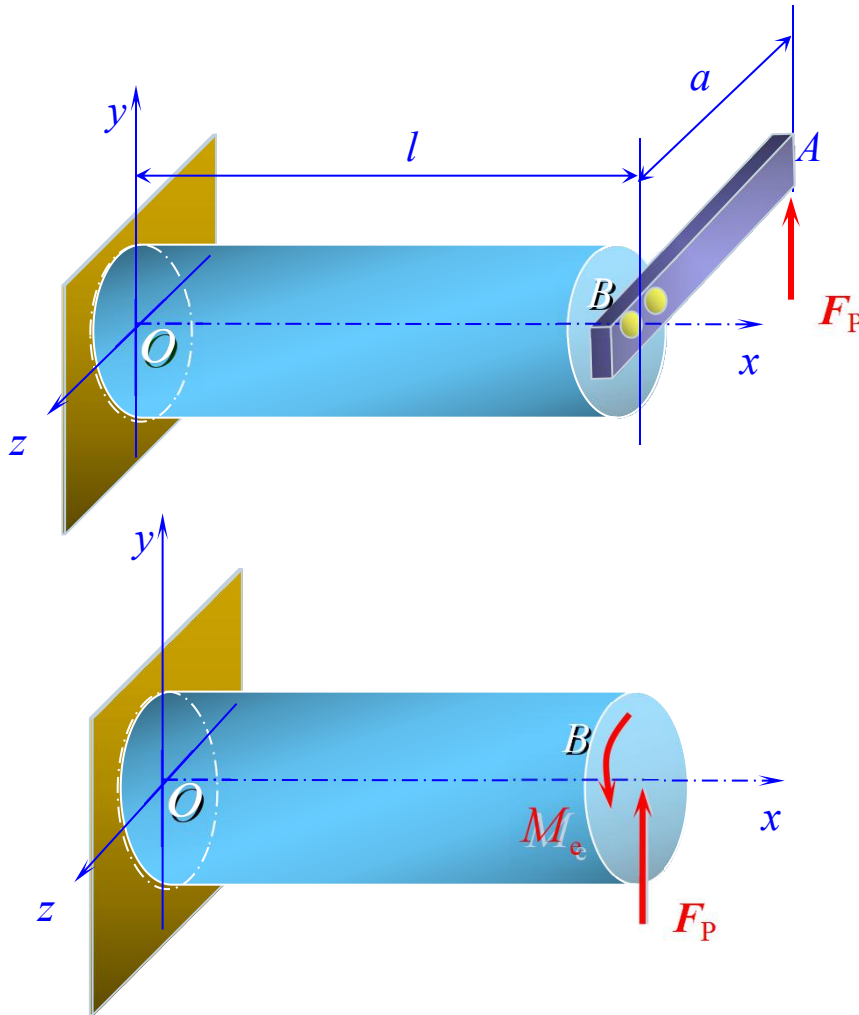
## 能力训练 5



圆杆 $BO$ ，左端固定，右端与刚性杆 $AB$ 固结在一起。刚性杆的 $A$ 端作用有平行于 $y$ 坐标轴的力 $F_P$ 。若已知 $F_P=5\text{ kN}$ ， $a=300\text{ mm}$ ， $l=500\text{ mm}$ ，材料为Q235钢，许用应力 $[\sigma]=140\text{ MPa}$ 。

**试求：**分别用最大剪应力准则和畸变能密度准则设计圆杆 $BO$ 的直径 $d$ 。



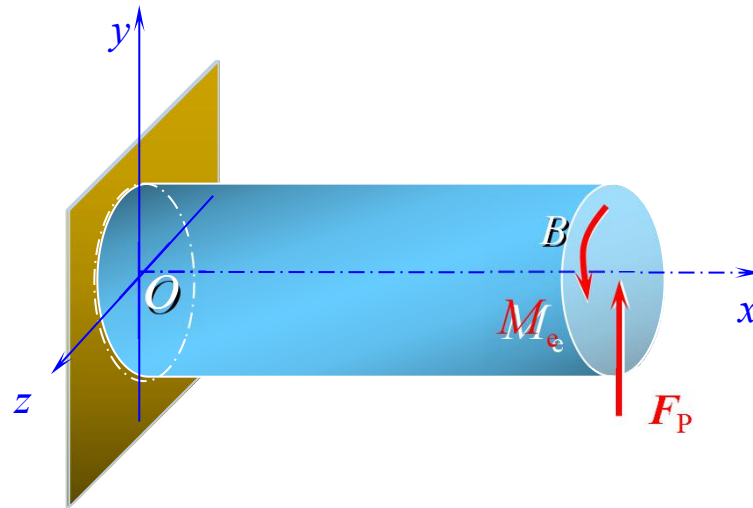


**解：1. 将外力向轴线简化**

将外力 $F_P$ 向 $BD$ 杆的 $B$ 端  
简化，得到一个向上的力和  
一个绕 $x$ 轴转动的力偶：

$$F_P = 5 \text{ kN},$$

$$M_e = F_P \times a = 1500 \text{ N}\cdot\text{m}$$

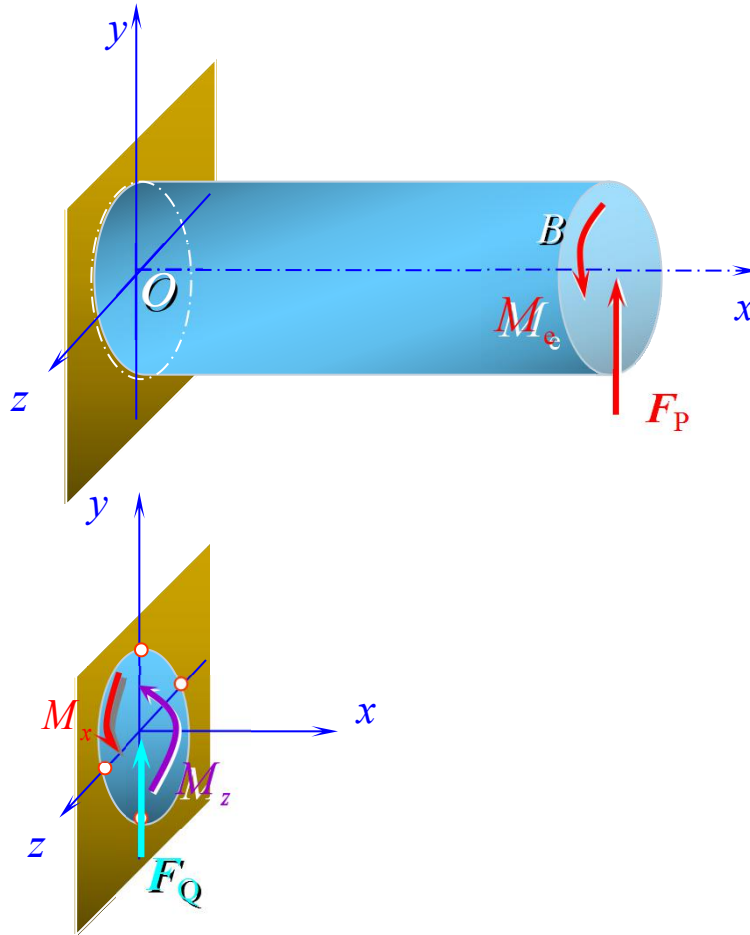


**解：2. 确定危险截面以及其上的内力分量**

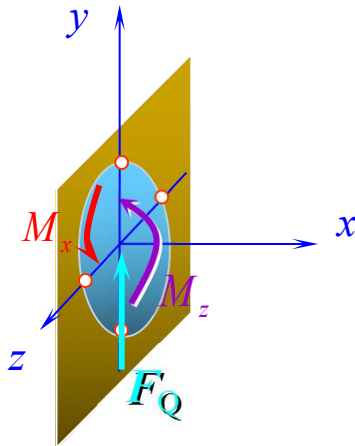
**$BO$ 杆相当于一端固定的悬臂梁，在自由端承受集中力和扭转力偶的作用，同时发生弯曲和扭转变形。**



## 解：2. 确定危险截面以及其上的内力分量



不难看出， $BO$ 杆的所有横截面上的扭矩都是相同的，弯矩却不同，在固定端 $O$ 处弯矩取最大值。因此固定端处的横截面为危险面。此外，危险面上还存在剪力，考虑到剪力的影响较小，可以忽略不计。



**解：2. 确定危险截面以及其上的内力分量**

**因此固定端处的横截面为危险面。危险面上的扭矩和弯矩的数值分别为**

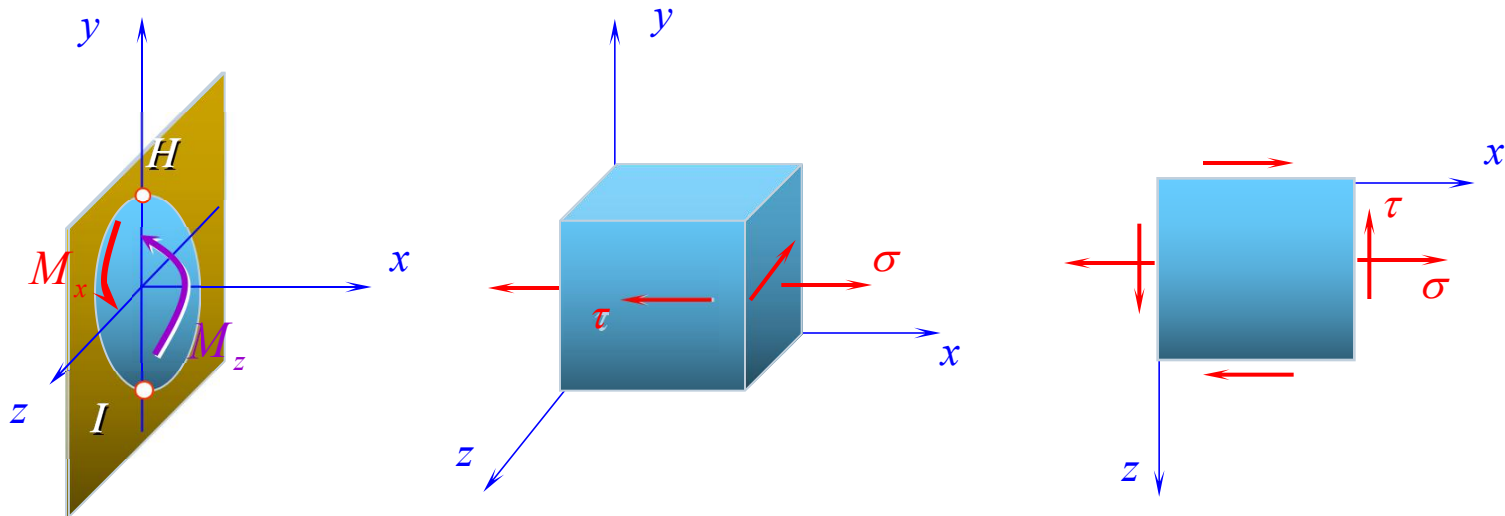
**弯矩**  $M_z = F_p \times b = 5 \text{ kN} \times 10^3 \times 500 \text{ mm} \times 10^{-3} = 2500 \text{ N}\cdot\text{m},$

**扭矩**  $M_x = M_e = F_p \times a = 5 \text{ kN} \times 10^3 \times 300 \text{ mm} \times 10^{-3} = 1500 \text{ N}\cdot\text{m}$



弯矩  $M_z = F_p \times b = 5 \text{ kN} \times 10^3 \times 500 \text{ mm} \times 10^{-3} = 2500 \text{ N}\cdot\text{m}$ ,  
扭矩  $M_x = M_e = F_p \times a = 5 \text{ kN} \times 10^3 \times 300 \text{ mm} \times 10^{-3} = 1500 \text{ N}\cdot\text{m}$

解：3. 确定危险点及其应力状态





**解：4. 应用强度设计准则设计BO杆的直径**

**应用最大剪应力准则，则有**

$$\frac{32\sqrt{M^2 + M_x^2}}{\pi d^3} \leq [\sigma]$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \times \sqrt{M_z^2 + M_x^2}}{\pi [\sigma]}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{32 \times \sqrt{(2500\text{N}\cdot\text{m})^2 + (1500\text{N}\cdot\text{m})^2}}{\pi \times 140\text{MPa} \times 10^6}} = 0.0593\text{m} = 59.3\text{mm}$$



**解：4. 应用强度设计准则设计BO杆的直径**  
应用畸变能密度准则，则有

$$\frac{32\sqrt{M^2 + 0.75M_x^2}}{\pi d^3} \leq [\sigma]$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \times \sqrt{M_z^2 + 0.75M_x^2}}{\pi [\sigma]}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{32 \times \sqrt{(2500\text{N} \cdot \text{m})^2 + 0.75 \times (1500\text{N} \cdot \text{m})^2}}{\pi \times 140\text{MPa} \times 10^6}} = 0.0522\text{m} = 52.2\text{mm}$$



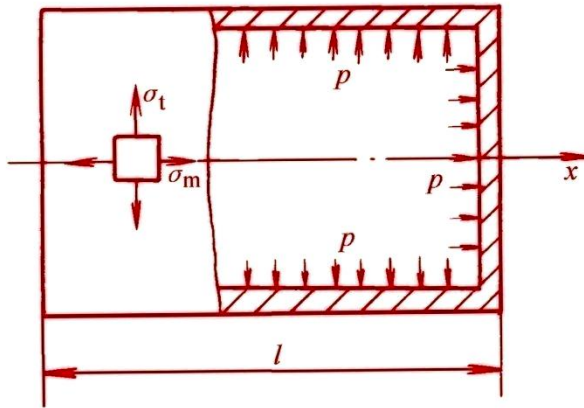
# ■ 工程应用之三

## 圆柱形薄壁容器强度设计简述





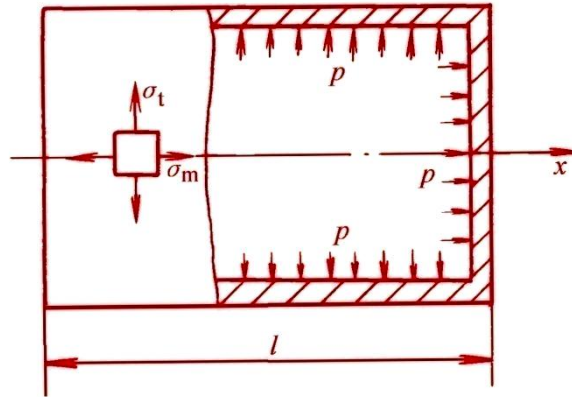
承受内压的薄壁容器，在忽略径向应力的情形下，其各点的应力状态均为平面应力状态。而且 $\sigma_m$ 、 $\sigma_t$ 都是主应力。于是，按照代数值大小顺序，三个主应力分别为



$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{pD}{2\delta}$$

$$\sigma_2 = \sigma_m = \frac{pD}{4\delta}$$

$$\sigma_3 = 0$$



$$\sigma_1 = \sigma_t = \frac{pD}{2\delta}$$

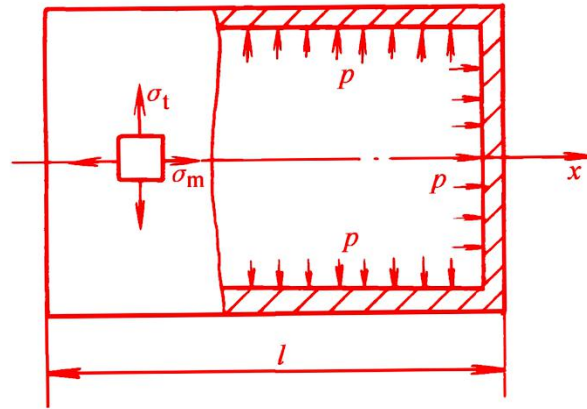
$$\sigma_2 = \sigma_m = \frac{pD}{4\delta}$$

$$\sigma_3 = 0$$

以此为基础，考虑到薄壁容器由韧性材料制成，可以采用最大剪应力准则或畸变能密度准则进行强度设计。

例如，应用最大剪应力准则，有

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pD}{2\delta} - 0 \leq [\sigma]$$



$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{pD}{2\delta} - 0 \leq [\sigma]$$

由此得到壁厚的设计公式

$$\delta \geq \frac{pD}{2[\sigma]} + C$$

其中 $C$ 为考虑加工、腐蚀等的影响的附加壁厚量，有关的设计规范中都有明确的规定。



# ■ 深度研讨



- ★ 关于应力强度与计算应力
- ★ 要注意不同强度设计准则的适用范围
- ★ 要注意强度设计的全过程
- ★ 关于莫尔强度准则
- ★ 研讨问题



# ★ 关于应力强度与计算应力



设计准则中直接与许用应力 $[\sigma]$ 比较的量, 称为计算应力 $\sigma_{ri}$ 或应力强度 $S_i$

$$\sigma_{r1} (\text{或} S_1) = \sigma_1 \leq [\sigma] \quad (\text{最大拉应力准则})$$

$$\sigma_{r2} (\text{或} S_2) = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma] \quad (\text{最大拉应变准则})$$

$$\sigma_{r3} (\text{或} S_3) = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma] \quad (\text{最大剪应力准则})$$

$$\sigma_{r4} (\text{或} S_4) = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} \leq [\sigma]$$

(应变能密度准则)

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq [\sigma]$$



# ★ 要注意不同强度设计准则的适用范围





- 大多数韧性材料在一般应力状态下发生塑性屈服；
- 大多数脆性材料在一般应力状态下发生脆性断裂；
- 要注意例外。



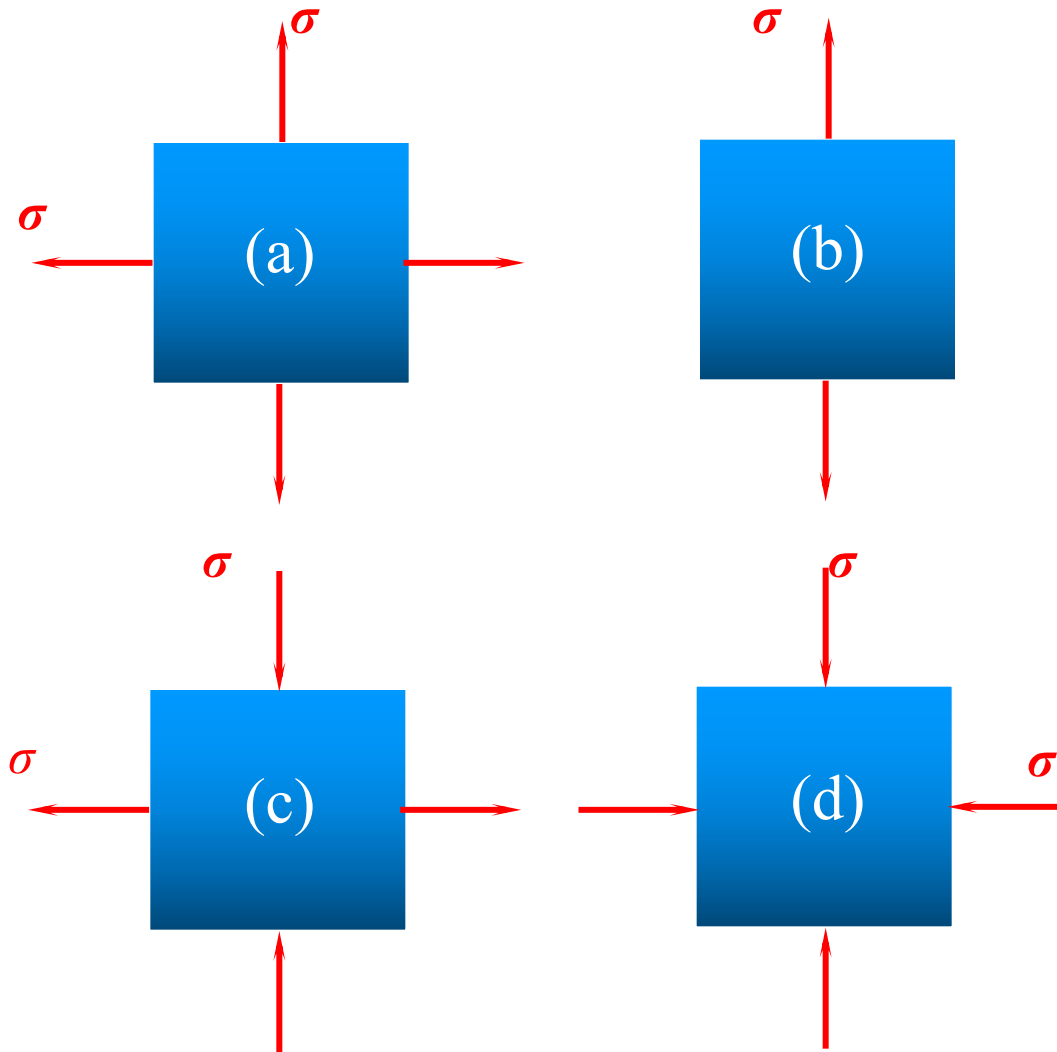
# ★ 要注意强度设计的全过程



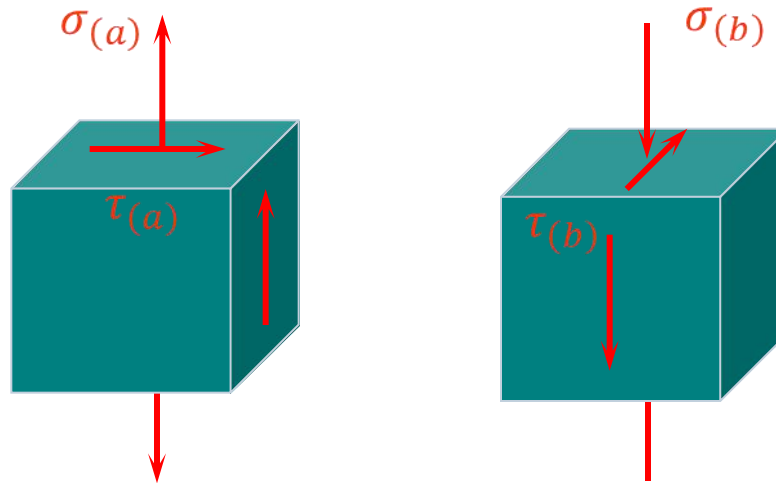
**设计准则并不包括强度设计的全过程，只包含确定了危险点及其应力状态之后的计算过程。**

**因此，在对构件或零部件进行强度设计时，要根据强度设计步骤进行。**

**特别要注意的是，在复杂受力形式下，要正确确定危险点以及危险点的应力状态，并根据可能的失效形式选择合适的强度设计准则。**



低碳钢处于图  
示应力状态下，根  
据最大剪应力理论，  
试分析：哪一个应  
力状态最先发生失  
效？



低碳钢处于图示应力状态下，根据最大剪应力准则，试分析：哪一个应力状态最先发生失效？



# ★ 关于莫尔强度准则



## 莫尔强度准则出现的背景：

试验结果表明，一些拉、压强度不等的脆性材料（例如灰铸铁和一般混凝土）在某种应力状态（例如单向压缩状态）下，也可能发生屈服或剪断。

常规的4个强度准则均无法解释这种试验结果

外力剪力拉压强度不等的脆性材料的失效判据和相应的设计准则，德国工程师莫尔提出了新的失效假说，称之为莫尔准则。



## 莫尔强度准则的建立:

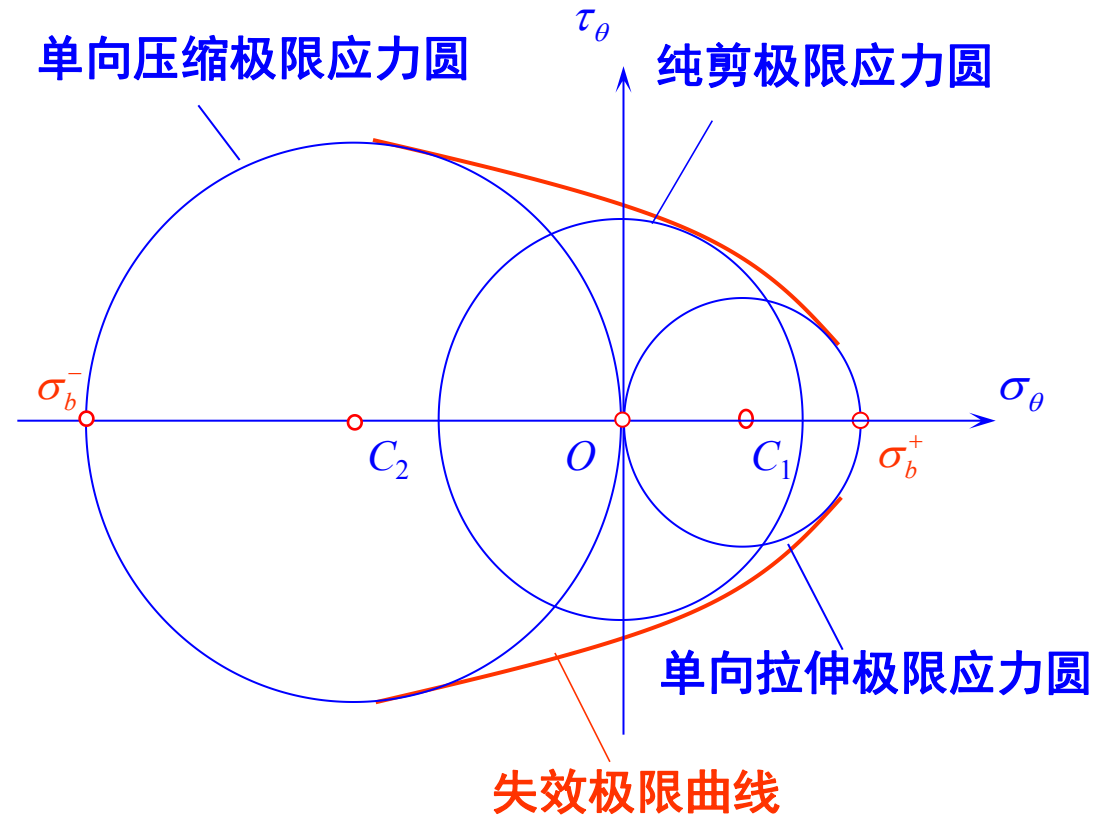
莫尔准则是通过莫尔应力圆表述的。

先通过试验, 确定不同主应力比值 ( $\sigma_1: \sigma_2: \sigma_3$ ) 下发生失效时的正应力值, 据此画出应力圆, 称为极限应力圆。

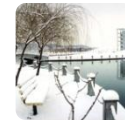
这些极限应力圆的包络线, 称为极限曲线。

图中所示为单向拉伸、单向压缩和纯剪应力状态的极限应力圆所构成的极限曲线。

莫尔准则认为: 无论什么应力状态, 只要它的应力圆与上述极限曲线相接触, 即发生失效。

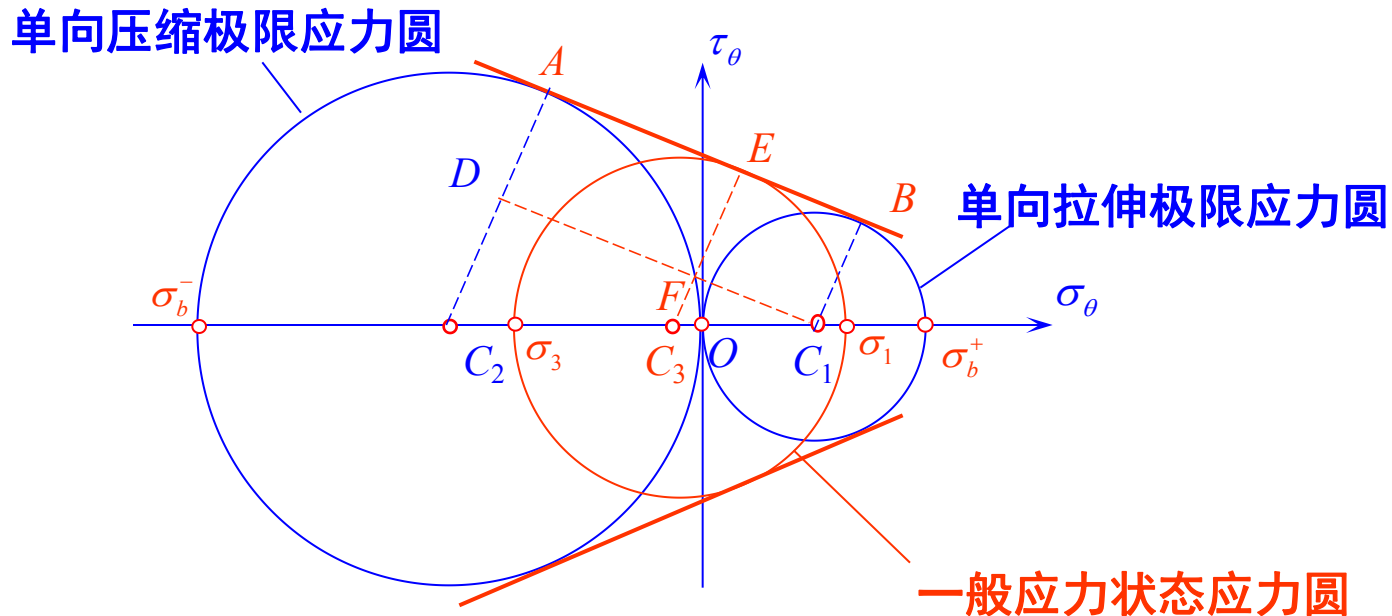


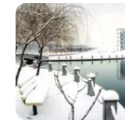




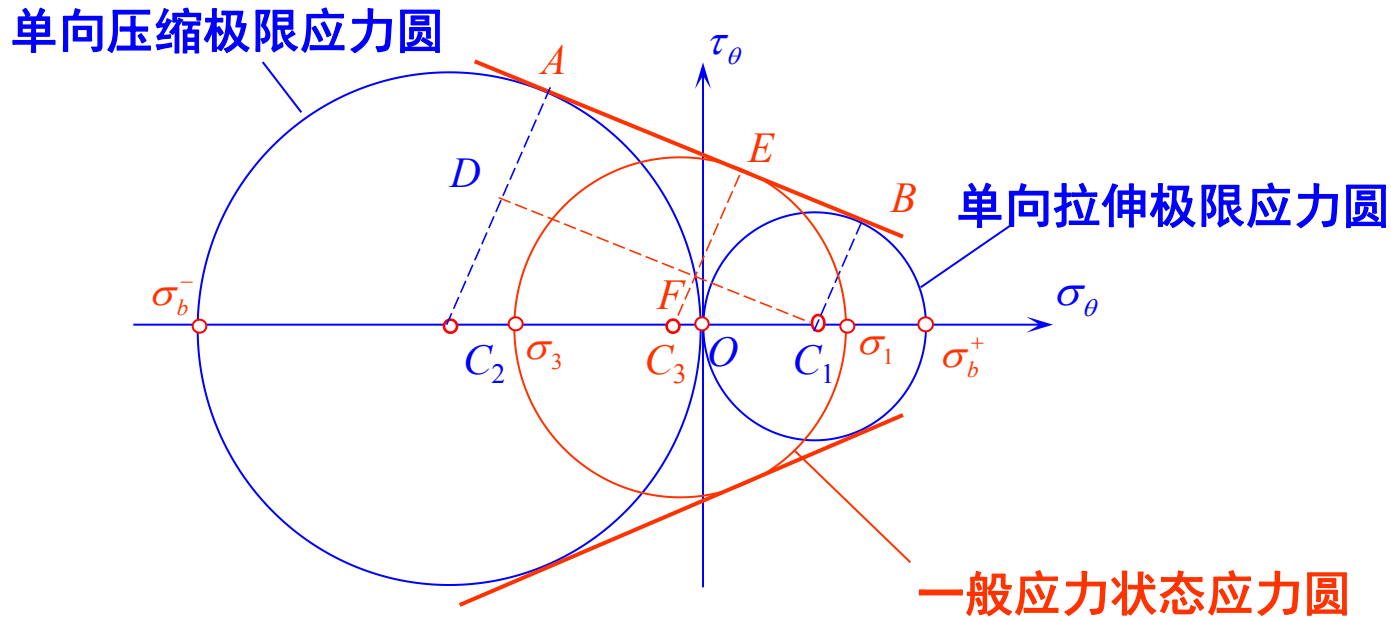
## 莫尔强度准则:

为了得到便于应用的解析表达式, 采用单向拉伸应力圆和单向压缩极限应力圆的公切线作为极限曲线, 代替包络线。





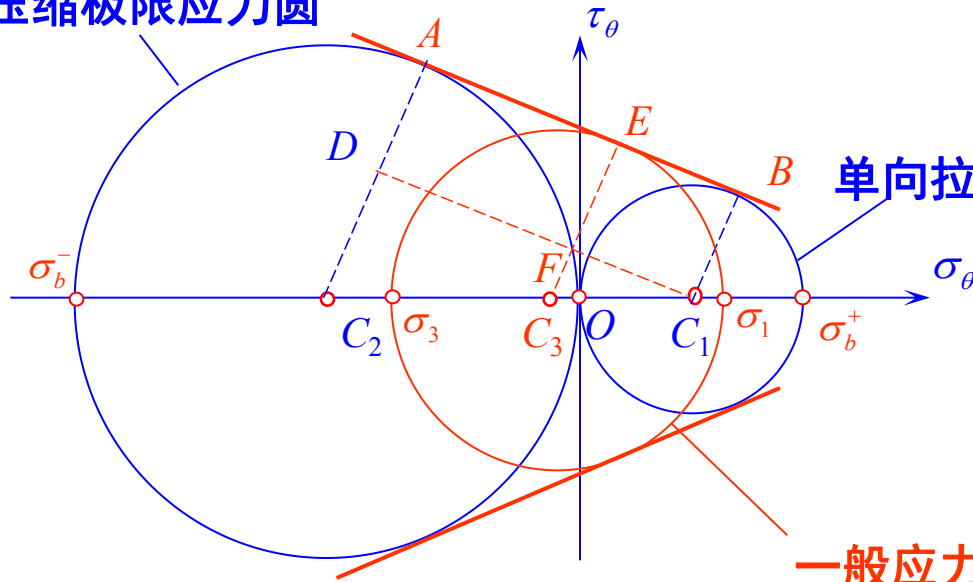
## 莫尔强度准则:



所谓建立莫尔准则的解析表达式，就是根据极限应力圆和极限曲线之间的几何，确定：一般应力状态  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  失效时，主应力与拉伸强度极限和压缩强度极限之间的关系。



单向压缩极限应力圆



单向拉伸极限应力圆

一般应力状态应力圆

$$\frac{C_3F}{C_2D} = \frac{C_1C_3}{C_1C_2}$$

$$C_3F = C_3E - EF = C_3E - C_1B = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_b^+}{2}$$

$$C_2D = C_2A - AD = \frac{\sigma_b^-}{2} - \frac{\sigma_b^+}{2}$$

$$C_1C_2 = OC_1 + OC_2 = \frac{\sigma_b^+}{2} + \frac{\sigma_b^-}{2}$$

$$C_1C_3 = OC_1 + OC_3 = \frac{\sigma_b^+}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$



$$\frac{C_3F}{C_2D} = \frac{C_1C_3}{C_1C_2}$$

$$C_3F = C_3E - EF = C_3E - C_1B = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_b^+}{2}$$

$$C_2D = C_2A - AD = \frac{\sigma_b^-}{2} - \frac{\sigma_b^+}{2}$$

$$C_1C_2 = OC_1 + OC_2 = \frac{\sigma_b^+}{2} + \frac{\sigma_b^-}{2}$$

$$C_1C_3 = OC_1 + OC_3 = \frac{\sigma_b^+}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_b^+} - \frac{\sigma_3}{\sigma_b^-} = 1$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 \frac{\sigma_b^+}{\sigma_b^-} = \sigma_b^+$$

$$\sigma_1 - \sigma_3 \frac{[\sigma]^+}{[\sigma]^-} = [\sigma]^+$$

失效判据

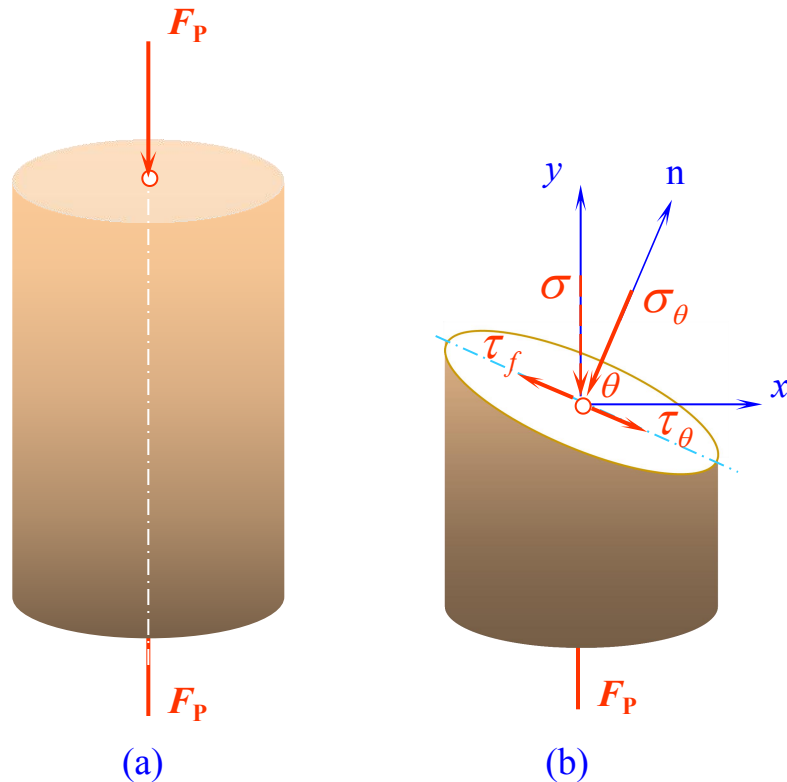
设计准则



# ★ 研讨问题



# 研讨问题 1

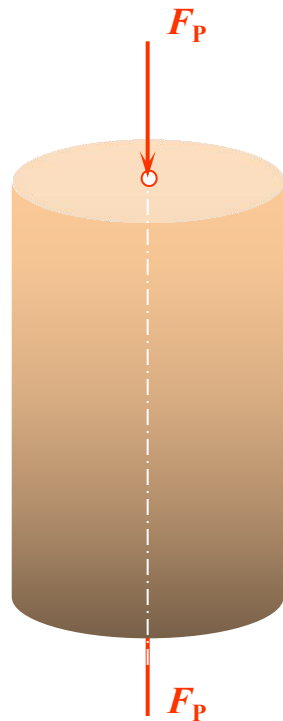


灰铸铁压缩实验结果表明，不仅会产生塑性变形，而且破坏断口呈光滑错动样，断口平面法线与轴线加载方向有一大约 $55^\circ$  夹角。关于产生这种破坏现象的原因，有多种解释。尝试采用**内摩擦和摩擦角**的概念，作简单分析。设材料的内摩擦系数和摩擦角分别为：

$$\mu = 0.35, \quad \varphi_m = 19.3^\circ$$



## 研讨问题 2

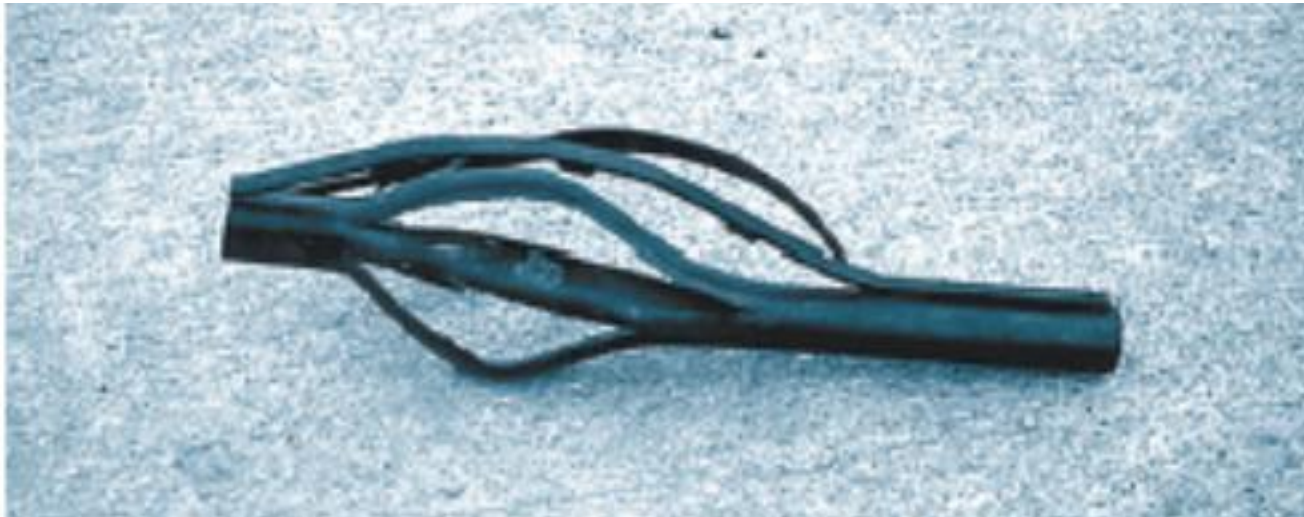


假设压缩强度极限是拉伸强度极限的2.5倍。采用莫尔强度理论解释压缩破坏的断面角度。



## 研讨问题 3

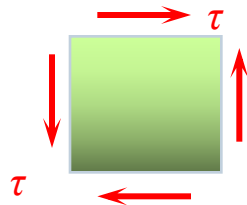
承受内压的管道发生的破坏如图所示，请分析：  
管道破坏属于韧性失效还是脆性失效？引起破坏的是  
最大拉应力还是最大剪应力？







## 研讨问题 4



$$\tau \leq [\tau]$$

### 一个工程实际问题——

设计承受纯扭转的圆轴时，如果只知道材料的许用正应力 $[\sigma]$ ，能不能设计出圆轴的直径，以满足强度要求？



## 能力训练 I

7-I-1

7-I-3

## 能力训练 II

7-II-3

7-II-4

7-II-5



## 再认知测试

7-1

7-2



谢大家