继续把“摒弃似是而非”落到实处

——关于梁弯曲变形和位移分析的精讲课

5 月 25 日，是关于梁弯曲变形和位移分析的一堂精讲课。

课前，学生已经自主学习了梁的变形与曲率、梁的三种位移、挠度与转角的相互关系。

这堂课开始，李老师通过提问考察了学生的自主学习情况，并提示：

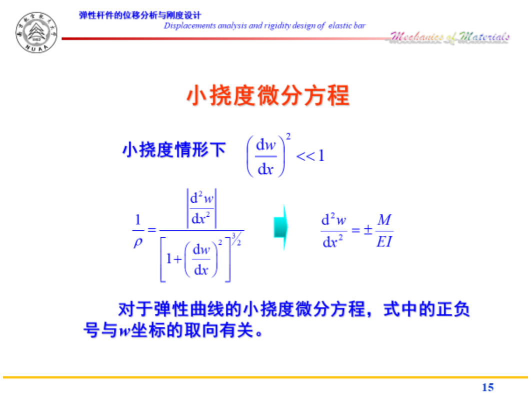
在小变形的情形下，轴向位移与挠度相比为高阶小量，故通常不考虑；

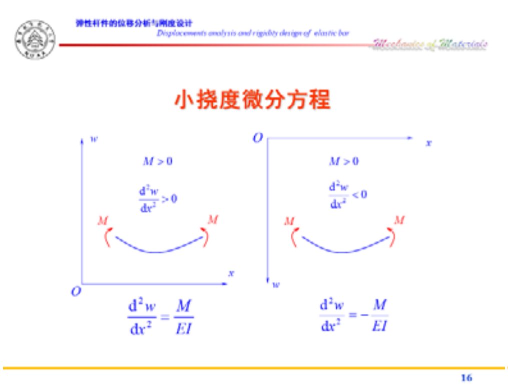
转角与挠度的关系写成 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=\theta$ 的前提是：小变形、忽略剪切变形。

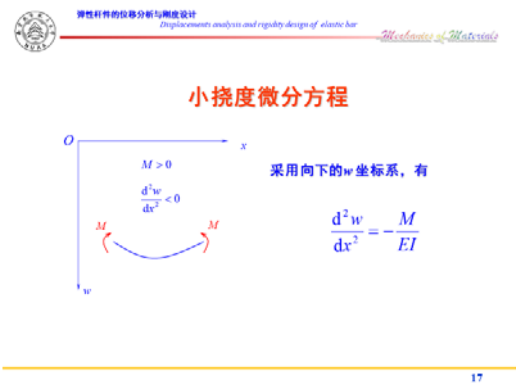
这一堂精讲课主要有几部分内容：梁的小挠度微分方程及其积分、叠加法确定梁的挠度与转角、梁的刚度设计。

一、梁的小挠度微分方程及其积分

在正应力分析中，已经建立了曲率与弯矩和弯曲刚度之间的关系，而数学中给出了以挠度的一阶导数和二阶导数表示的曲率公式。联立二者，可以得到挠度与弯矩和弯曲刚度之间的关系式，在小变形的情形下，进一步就得到确定梁挠度和转角的微分方程——小挠度微分方程，其正负号与坐标取向有关。







在这一部分的讲解中，范老师设计了两个问题：

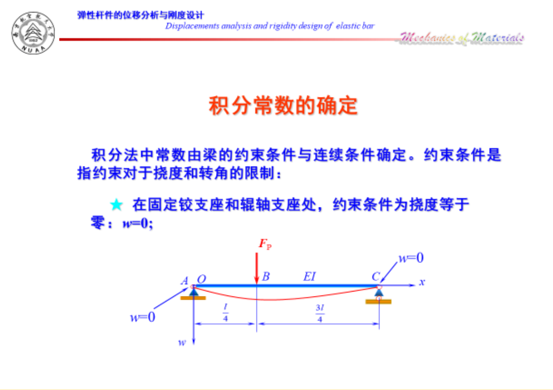
1、小挠度微分方程中的“±”是怎么来的？

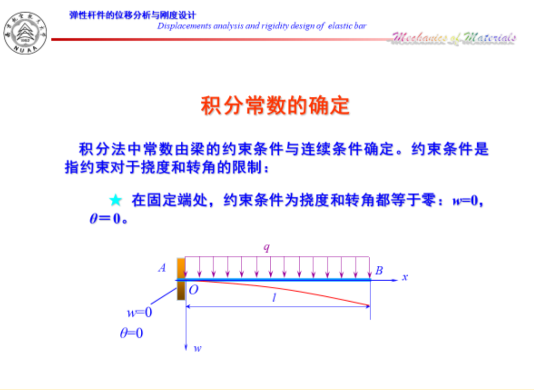
2、如何在不同坐标系中快速地判断挠度二阶导数的正负号？

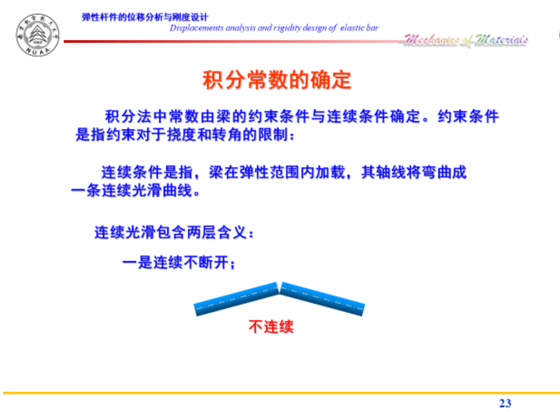
对于第 1 个问题，学生很快回答：把绝对值符号去掉，需要加“±”；对于第 2 个问题，范老师启发学生：挠度的二阶导数就是一阶导数的变化率，而一阶导数的几何意义就是切线的斜率，所以就看切线斜率是递增的还是递减的。

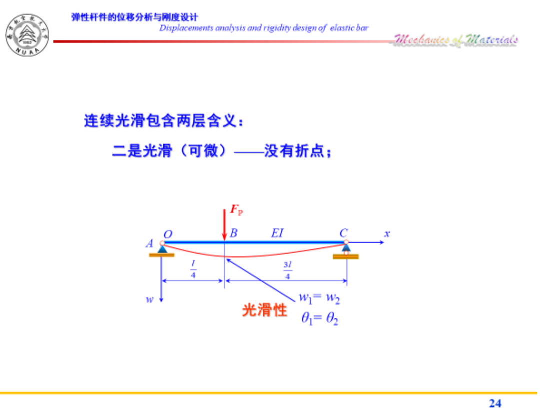
对于等截面梁，写出弯矩函数，代入小挠度微分方程中，对 x 作不定积分，就可以得到含积分常数的挠度方程与转角方程。需要指出的是：如果梁上的载荷不连续，就要分段建立弯矩函数，代入微分方程后，分段积分。每增加一段就增加两个积分常数。

积分常数由梁的约束条件与连续条件确定。









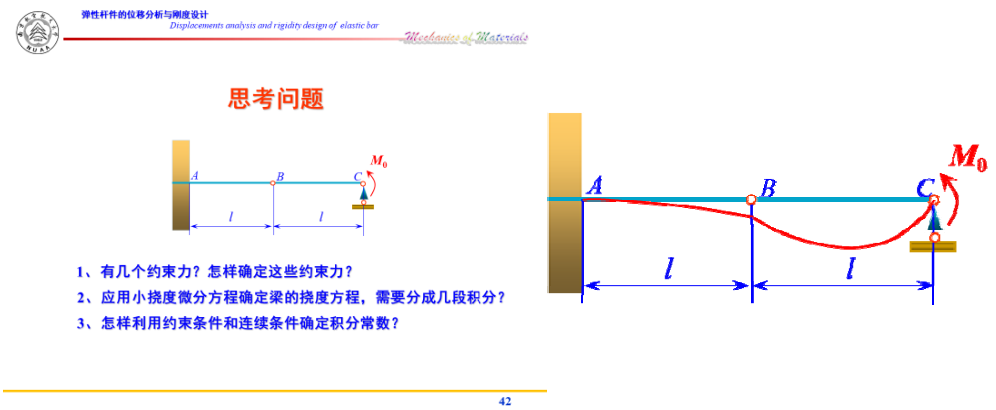
李老师特别强调了连续光滑的含义：

1、连续不断开；

2、光滑没有折点。

连续光滑是贯穿梁的变形和位移分析的一个重要概念，除了确定积分常数，还应用于画挠度曲线的大致形状。

引导学生做完两个练练手的问题后，对积分法进行了总结，并提出一个思考问题进行课堂研讨。



通过对这个问题的研讨，同学们发现：中间铰处挠度连续，但转角不连续。

二、叠加法确定梁的挠度与转角

在位移与力是线性关系的条件下，工程中通常采用叠加法计算很多复杂情形下梁的位移：

叠加法应用于多个载荷作用的情形；

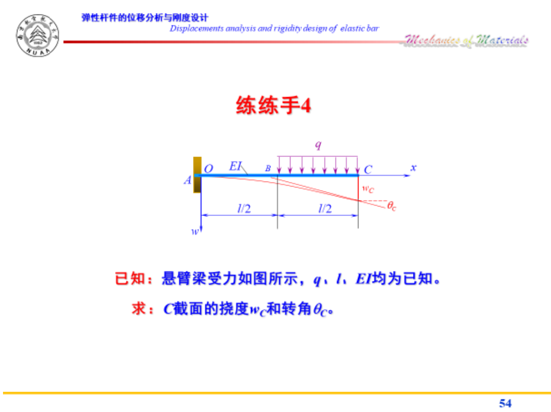
叠加法应用于间断性分布载荷作用的情形；

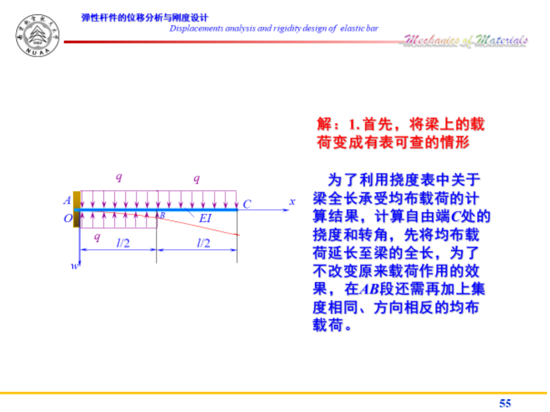
逐段刚化法——叠加法的另一种形式；

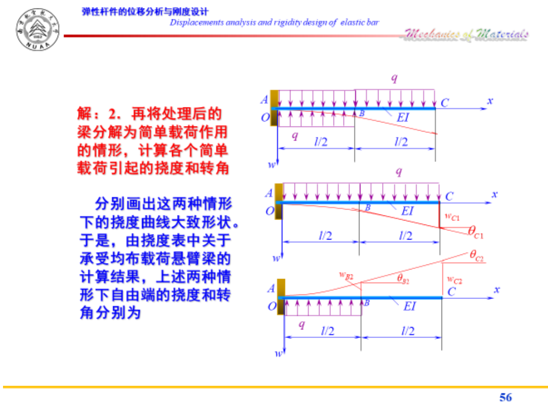
叠加法应用于确定斜弯曲时的位移。

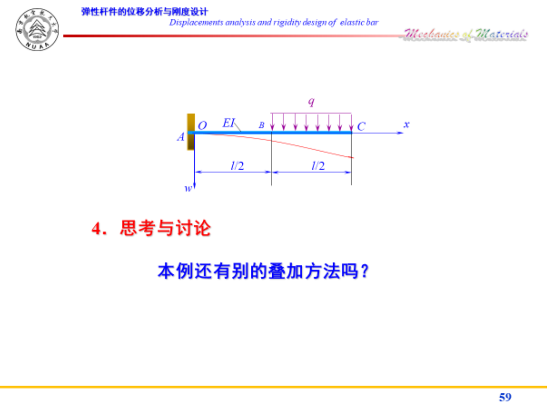
对于叠加法应用于间断性分布载荷作用的情形，李老师给出一个练练手的问题，先请同学们看一下挠度表中有没有现成的结果，并提示：能不能把载荷变成有表可查的情形？

罗发程同学到讲台展示了一下他的想法，将载荷变为有表可查的两种情形的叠加。只是第二种情形中，梁的左半部分有表可查，而右半部分没有变形、只有位移，进一步应用连续光滑的概念即可得到右半部分任意横截面的位移。



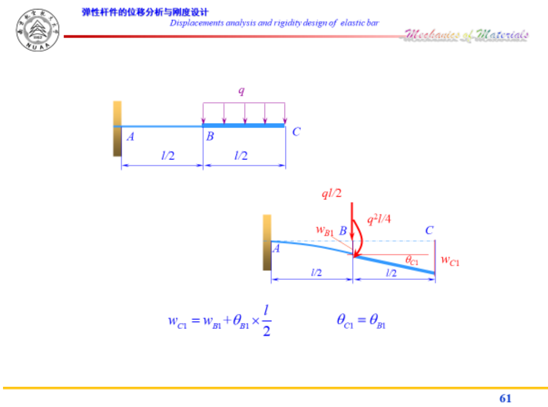


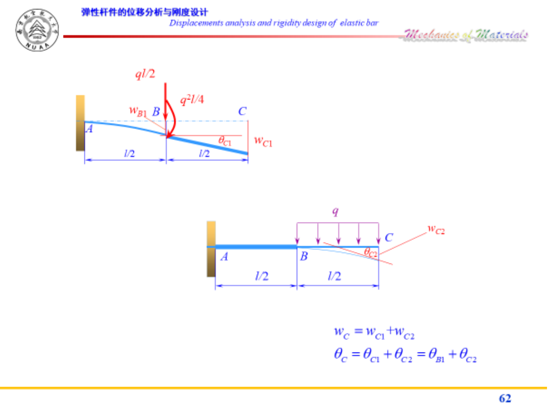




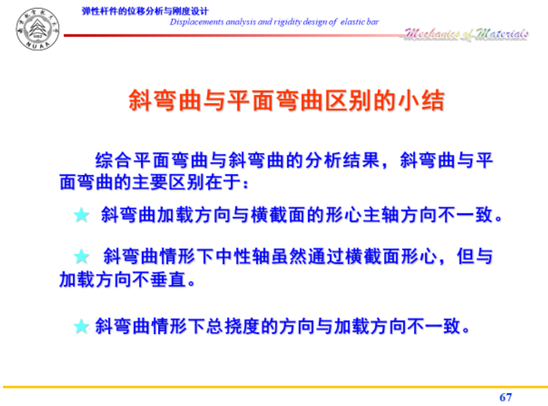
问题的最后，李老师问：还有没有别的叠加方法？唐振家同学回答：先把 *AB* 段视为刚体，考察 *BC* 段变形对 *C* 截面位移的影响，这个可以通过查挠度表得到结果；再把 *BC* 段视为刚体，考察 *AB* 段变形对 *C* 截面位移的影响，可以通过力系简化得到 *B* 截面上的载荷，也是有表可查的情形。

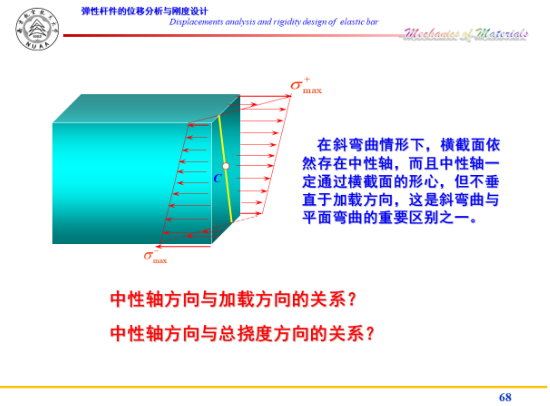
李老师总结了唐振家的方法，进一步讲授了逐段刚化法，并启发引导同学们用逐段刚化法求解了这个问题，同时提示：在 ***B*** **截面处的连续光滑**至关重要。





叠加法应用于确定斜弯曲时的位移则主要由同学们自主学习完成。李老师综合了正应力分析、梁的变形和位移分析两方面的内容，总结了平面弯曲和斜弯曲的区别。



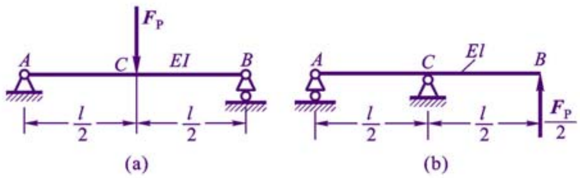


三、梁的刚度设计

对于主要承受弯曲的梁和轴，挠度和转角过大会影响构件或零件的正常工作。李老师从工程意义和设计准则两方面展开讲解，跟同学们一起讨论了一个练练手的问题。

下课之前进行了随堂测试，考察的知识点与本堂课密切相关，全班 18 名同学全部正确。

第 18 次随堂测试题



图中两种梁：

（A）受力不同，弯矩图相同，变形和位移都不相同；

（B）载荷不同但受力相同，弯矩图相同，变形相同但位移不相同；

（C）受力不同，弯矩图相同，变形和位移都相同；

（D）载荷与受力都不相同，弯矩图相同、变形与位移都不相同。

正确答案是：